L-22

複数入力のある待ち行列モデルの解析と処理規則の提案
Analysis of Queuing Model with Multi-Input and Its Service Procedure

○星野　貴弘[1]，浜松　芳夫[1]
*Takahiro Hoshino[1], Yoshio Hamamatsu[1]

Abstract: In a queuing system, a merging control strategy is necessary to avoid congestions with waiting lines. In this study, under the assumption that each waiting line is assigned time-independent priority, we analyze congestion with a stochastic model. A quantitative estimation of the congestion is successfully obtained in terms of the average queue length and the average queuing delay. On the basis of analytical results, we propose a control strategy that changes the priority periodically. Using simulation, it is clarified that the proposed control strategy gives an arbitrary values of the queue length and the queuing delay on each line.

1. はじめに

本研究は，複数入力のある待ち行列モデルにおける輻輳現象を対象とする．複数入力のある待ち行列モデルとは，以下のように定義する．複数の独立した待合室に対して，単一節点が各待合室から等距離に設けられていて，各待合室のすべての客はこの節点を必ず通過するものとする．節点には，一度に一人の客までしか入ることができないものとし，各待合室の客は他の待合室の客の節点通過によって待つことになる．

このような現象は，高速道路の合流部などのように車両同士の衝突を避けるために本線または側線の車両が減速または停車する際に見られる．したがって，待ち行列モデルの解析にあたり合流点の通過により生じる待ち時間はシステム全体の待ち時間を決定する上で重要な要素である．以上のような背景から，これまでに筆者らは入力数が 2 の場合の解析を行なってきた[(1)]．本研究では，入力数を任意として合流に伴う輻輳現象を解析し，より一般的な議論を行なう．

複数の入力が集中する単一節点 (合流点) には，高々一人の客しか入れないため何らかの制御が必要となる．本研究では，複数入力のある待ち行列モデルでの基本的な挙動を解析するため，各入力に対して，時不変の優先順位を与え，それに従い合流するものとした．このような優先規律により制御されるモデルとして優先権付き待ち行列モデル[(2),(3)]が挙げられる．本研究では，サービス時間ではなく合流点通過に伴う待ち時間に着目しているため，優先権付き待ち行列モデルで得られた結果を直接本モデルに適用することは困難である．そこで，本モデルの特性に応じた数理モデルを構築し，各待合室における平均待ち行列長等のシステムの基本的緒量を導出する．

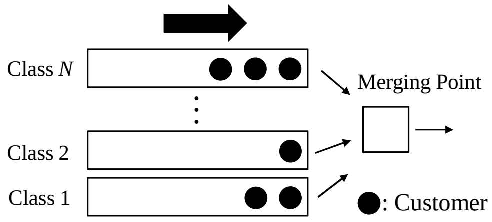

Fig. 1: Queuing Model with Multi-Input

2. 対象モデルの数学的記述

本研究では，解析の便宜上，システムの単位時間を Δt とし，単位時間ごとの離散時点に着目した数理モデルを構築する．対象とするモデルの概略図を図 1 に示す．すべての客は，いずれかの待合室 (Class) に到着し，その後，合流点 (Mergeing Point) を単位時間かけて通過するものとする．N 個の待合室には，それぞれ二項分布に従い客が到着するものとする．具体的には，単位時間あたりに Class i の客が 1 人到着する確率を p_i とし，到着しない確率を $q_i(=1-p_i)$ とする．単位時間の間に 2 人以上の客が到着することはないものとする．同じ待合室内の客は先着順 (FIFO) で合流点を通過するものとするが，客同士の競合が起きた場合には，その中で優先度が最も高いものから合流させる．優先順位は，各待合室ごとに割当てるものとし，$i<j$ とするとき，Class i の客は Class j の客よりも高優先度の客であるとする．すなわち，Class 1 の客は競合が起こった場合にも待つことなく合流でき，Class N の客は競合が起こった場合，必ず待つことになる．

＜状態定義＞　各待合室における平均待ち行列長を求めるため，各待合室の待ち行列長を状態とすることが考えられるが，その解析は困難になることが予想される．前述したとおり，低優先度の客が高優先度の客を待たせることはない．そのため，Class i 上に形成される待ち行列長は，Class i までの待ち行列長の総和と Class $(i-1)$ までの待ち行列長の総和との差により求められる．以降，Class 1 から任意の Class までの待ち行列長の総和を“総待ち行列長”と呼ぶことにする．以上により，Class 1 から Class $i(\geq 2)$ までの総待ち待ち

1:日大理工・教員・電気

行列長が $j(=0,1,2,\cdots)$ 人のとき，状態 (j) と定義する．任意の状態 (j) から状態 $(j+u-1)$(ただし，$u \leq i$) へは，i 個の Class 中に u 人の客が新たに到着すると推移する．この推移確率 Λ_u とすれば，次のように表される．

$$\Lambda_u = \sigma_u\left(\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\cdots,\frac{p_i}{q_i}\right)\prod_{k_0=1}^{i} q_{k_0} \tag{1}$$

ただし，上式中の σ_u は，u 次の基本対称式を表しており，$X_i=\{1,2,\cdots,i\}$ とし，$|x|$ を X_i の部分集合 x の濃度と定義すれば，以下の式に従う．

$$\sigma_u(y_1,y_2,\cdots,y_i) = \sum_{x\subset X_i,|x|=u}\prod_{t\in x} y_t \tag{2}$$

3. 解析

ここでは，平衡状態における平均待ち行列長の導出を行う．平衡状態において状態 (j) である確率を P_j と表すものとするとき，任意の状態において単位時間あたりの出力量と入力量が等しいことを用いれば，

$$\Lambda_0 P_1 = \sum_{j=2}^{i}\Lambda_j P_0 \tag{3}$$

が成り立つ．上式の左辺は状態 (1) から状態 (0) へ推移する割合，右辺は状態 (0) から他の状態へ推移する割合である．同様に以下 2 つの式が成り立つ．

$$\sum_{u=0}^{j+1}\Lambda_u P_{j-u+1} = P_j \ ;\ 1\leq j\leq i-2 \tag{4}$$

$$\sum_{u=0}^{i}\Lambda_u P_{j-u+1} = P_j \ :\ j\geq i-1 \tag{5}$$

これら，(3) から (5) 式を母関数に変換する [4] ことにより，Class i までの平均総待ち行列長 $L_{i,S}$ は，

$$L_{i,S} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} j\rho_j}{1-\sum_{j=1}^{i-1}\rho_j} \quad ;\ 2\leq i\leq N \tag{6}$$

と導かれる．ただし，(6) 式において $\rho_j = \sum_{u=j+1}^{i}\Lambda_u/\Lambda_0$ である．また，Class i の平均待ち行列長 L_i は，状態定義で述べたとおり $L_i = L_{i,S} - L_{i-1,S}$ であることから，以下のように得られる．

$$L_i = \frac{p_i\left(\sum_{u=1}^{i-1}p_u q_u - \sum_{u=1}^{i-1}\sum_{j=u+1}^{i-1}p_u p_j\right)}{\left(1-\sum_{u=1}^{i-1}p_u\right)\left(1-\sum_{u=1}^{i}p_u\right)} \tag{7}$$

4. 考察

解析したモデルの妥当性を検討するため，シミュレーションとの比較を行う．シミュレーションは，$1\Delta t$ ごとに乱数を用いて確率的に客の発生有無を決定すること

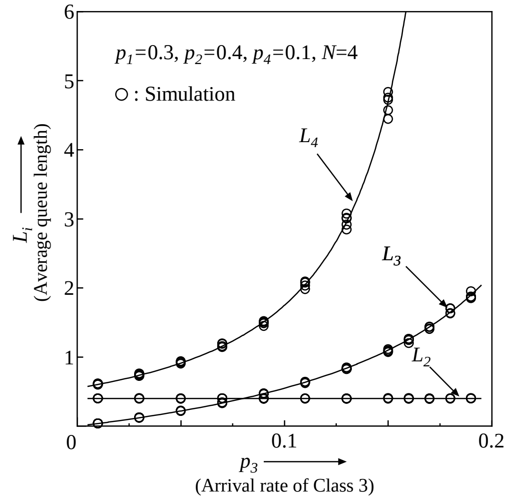

Fig. 2: Numerical examples L

により行った．図 2 にクラス数 $N=4$ の場合の Class 3 における客の到着確率に対する各待合室の平均待ち行列長をそれぞれ示す．グラフ中の実線は理論値を示し，○印はシミュレーション値を示している．グラフから明らかなように理論値とシミュレーション値はよく一致している．また，グラフから客の到着確率に対して Class 3,4 の平均待ち行列長には増加傾向が確認できるが，Class 2 の平均待ち行列長は，到着確率に対して一定である．これは，2 章で述べたとおり，Class 2 の待ち行列長は，Class 1 及び Class 2 の到着確率のみによって決まり，Class 2 よりも低優先度の客の到着に依存しないためである．

5. まとめ

本研究では，複数入力のある待ち行列システムにおける静的な優先順位の割当てを行った際の混雑現象を解析した。数理モデルの構築にあたって，高優先度の客は低優先度の客によって待たされないことから，状態をシステム全体の待ち台数とした。数理モデルから得られたシステム全体の平均待ち行列長から，流入路ごとの平均待ち行列長および平均通過遅れ時間を陽に求めることができた。

参考文献

(1) 星野・井上・坪井・浜松：「集団到着を考慮した個別輸送システム合流部の解析と制御戦略」，電学論誌 D，**128**，1，(2008)
(2) N. K. Jaiswal：“Priority Queues”，ACADEMIC PRESS (1968)
(3) Leonard Kleinrock: “Communication Nets”，McGraw-Hill Book Company (1964)
(4) C.L. リュー著，成嶋 弘，秋山 仁 訳：離散数学入門，マグロウヒルブック (1986)