O-1

模型補間法によるスピングラス模型の厳密な解析

Rigorous analysis of the spin glass model by Guerra's interpolation method

○新田貴成 [1]
Takanari Nitta

Abstract: I extend Guerra's interpolation method for the Sherrington-Kirkpatrick model with centered Gaussian random exchange interactions to that for the model with non-centered ones. We consider an extend path to the Sherrington-Kirkpatrick model from random field independent spin model via random field mean field Ising model. We show that the replica symmetric solution of the free energy becomes exact in high temperature region.

1. はじめに

Sherrington-Kirkpatrick(以下，SK) 模型は，スピングラスの平均場模型としてよく知られている．系は N 個のスピン変数 $\sigma_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ から成り，外部磁場を h，交換相互作用を J_{ij} として，ハミルトニアンは，

$$H_{SK}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \le i < j \le N} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{1 \le i \le N} h \sigma_i \tag{1}$$

で与えられる．任意の 2 つのスピンの間に働く交換相互作用は標準偏差 1 の Gauss 分布

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2}(J_{ij} - \frac{J_0}{\sqrt{N}})^2] \tag{2}$$

に従って定まったランダムな定数である．この模型はレプリカ法によって解析され，常磁性相，強磁性相，スピングラス相からなる相図が得られている．しかし，レプリカ法は数学的に正当化できないため，数学者によって厳密な定式化が試みられてきた．

近年，Guerra はランダム磁場中の独立スピン模型と，$J_0 = 0$ の SK 模型のハミルトニアンを 1 つのパラメーターで補間することによって，SK 模型の自由エネルギーの SK 解は下限であり，高温では正確であることを厳密に示した [1]．また，Talagrand はこの理論をあらゆる温度に拡張し，レプリカ対称性の破れた Parisi 解を厳密に示した [2]．

本研究では，$J_0 \neq 0$ の SK 模型を調べるため，Guerra の方法を次のように拡張する．2 つのパラメーター $(s, t) \in [0, 1]^2$ で補間される次のハミルトニアンを導入する．

$$H_{s,t}(\boldsymbol{\sigma}) = -\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \le i < j \le N} g_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sqrt{1-t} \sum_{1 \le i \le N} \sqrt{q} z_i \sigma_i - s\frac{J_0}{N} \sum_{1 \le i < j \le N} \sigma_i \sigma_j - (1-s) \sum_{1 \le i \le N} J_0 m \sigma_i - \sum_{1 \le i \le N} h \sigma_i \tag{3}$$

ただし，$g_{ij} (= J_{ij} - \frac{J_0}{\sqrt{N}})$ と z_i は標準 Gauss 分布に従うランダムな相互作用，m と q はパラメーターである．ここで，$(s, t) = (1, 1)$ のとき，SK 模型のハミルトニアン (1) となる．ハミルトニアン (3) に対して，ランダムな交換相互作用の平均値が 0 でない Gauss 分布 (2) に従う SK 模型において，同様の結論が得られるかどうかを試みる．

2. 期待値と自由エネルギーの定義

あるランダム変数 $\{J_{ij}\}$ の分布に関する関数 $f(\{J_{ij}\})$ の期待値を，次のように定義する．

$$Ef(\{J_{ij}\}) = \int \prod_{i<j} P(J_{ij}) dJ_{ij} \cdot f(\{J_{ij}\}) \tag{4}$$

同様に，ランダム変数 $\{z_i\}$ の関数 $g(\{z_i\})$ の期待値を

$$Eg(\{z_i\}) = \int \prod_{i} P(z_i) dz_i \cdot g(\{z_i\}) \tag{5}$$

と書くことにする．

また，スピン配位 $\boldsymbol{\sigma}$ に関する関数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ の期待値を

$$\langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle_{s,t} = \frac{\sum_{\boldsymbol{\sigma}} f(\boldsymbol{\sigma}) exp[-\beta H_{s,t}(\boldsymbol{\sigma})]}{Z_N(H_{s,t}(\boldsymbol{\sigma}))} \tag{6}$$

[1] 日大理工・院（前）・物理

のように定義する．ここで，$\beta(>0)$ は温度の逆数，$Z_N(H_{s,t}(\boldsymbol{\sigma}))(=\sum_{\boldsymbol{\sigma}} exp[-\beta H_{s,t}(\boldsymbol{\sigma})])$ は分配関数である．
そして，1 スピン当たりの自由エネルギーを

$$f(s,t) = -\frac{1}{N}\frac{1}{\beta}E\log Z_N(H_{s,t}(\boldsymbol{\sigma})) \tag{7}$$

と定義する．

3. 自由エネルギーの厳密性

全スピンの和を $S = N^{-1}\sum_{i\le N}\sigma_i$ とする．自由エネルギー $f(s,0)$ を s に関して微分すると，

$$\frac{d}{ds}f(s,0) = \frac{J_0}{2}E\langle(S-m)^2\rangle_{s,0} + \frac{J_0}{2}(m^2+\frac{1}{N}) \tag{8}$$

となる．あらゆる β に対して，次が

$$\lim_{N\to\infty}\langle(S-m)^2\rangle_{s,0} = 0 \qquad a.s. \tag{9}$$

のようにほとんど確実となるから，(8) の第 1 項は消去できて，$f(1,0)$ が次のように厳密に得られる．

$$f(1,0) = \frac{J_0}{2}(m^2+\frac{1}{N}) - \frac{1}{\beta}E\log 2\cosh[\beta(J_0m+h+\sqrt{q}z)] \tag{10}$$

ここで，パラメーター $m(=E\tanh[\beta(J_0m+h+\sqrt{q}z)])$ は (10) の右辺を最も小さくする値をとる．

次に，σ_i^1 と σ_i^2 のオーバーラップを $R_{12} = N^{-1}\sum_{i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2$ と定義する．自由エネルギー $f(1,t)$ を t に関して微分すると，

$$\frac{d}{dt}f(1,t) = \frac{\beta}{4}E\langle(R_{12}-q)^2\rangle_{1,t} - \frac{\beta}{4}(1-q)^2 \tag{11}$$

となる．(11) の右辺第 1 項は $\beta < \frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\beta J_0 < \frac{1}{4}$ で成り立つ次の式より，$N\to\infty$ としたときに消える．

$$E\langle(R_{12}-q)^2\rangle_{1,1} \le \frac{C}{N} \tag{12}$$

ここで，C は N によらない定数である．よって，(11) より $\beta < \frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\beta J_0 < \frac{1}{4}$ では，

$$\lim_{N\to\infty} f(1,1) = f_{SK}(\beta,h) \tag{13}$$

の関係が厳密に導けた．ただし，

$$f_{SK}(\beta,h) = \frac{J_0}{2}m^2 - \frac{1}{\beta}E\log 2\cosh[\beta(J_0m+h+\sqrt{q}z)] - \frac{\beta}{4}(1-q)^2 \tag{14}$$

であり，パラメーター $q(=E\tanh^2[\beta(J_0m+h+\sqrt{q}z)])$ は (13) の右辺を最も大きくする値をとる．一般の β に対して，(13) の右辺は下限を与える．$f_{SK}(\beta,h)$ は Sherrington と Kirkpatrick がレプリカ法によって得た自由エネルギーに一致している．

4. まとめ

本研究では，交換相互作用の平均値 J_0 が 0 でない Gauss 分布に従う SK 模型を，2 つのパラメーターで補間されるハミルトニアン $H_{s,t}(\boldsymbol{\sigma})$ を調べることで，レプリカ法を使うことなく数学的に厳密に自由エネルギーの SK 解を導くことができた．

参考文献

[1] F. Guerra, “ An introduction to mean field spin glass theory: methods and results ”(Les Houches, Session LXXXIII, 2005)

[2] M.Talagrand, “ Mean Field Models for Spin Glasses ” (2011)