O-10

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA における落下実験について

On a experiment of motion of a sphere in fluid in *PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA*

○中川康[1]，植松英穂[2]

*Kou Nakagawa[1]，Eisui Uematsu[2]

Abstract: In 1713 second edition of *PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA* was published by I.Newton . Newton considered phenomena of motion of a sphere in fluid . He used 8/3 times of a diameter of a sphere in order to find a distance of movement of the sphere theoretically . As he used 8/3 times of a diameter suddenly , so we investigated the meaning 8/3 times .

1. 目的

I.Newton は 1687 年に *PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA*（通称 *PRINCIPIA*，1713 年第二版，1726 年第三版）を刊行した．彼は，*PRINCIPIA* 第二編で抵抗媒質中での物体の運動を論じて，複数の実験を記述している．特に第二編第Ⅶ章の実験（第二版以降から登場）では，蝋と鉛からなる球体の空気中と真空中，および水中での重さなどの数値を提示し，流体内を落下する距離などを理論的に求めている．そこで Newton は，概略次のように述べている．

> ……実験 1. 空気中での重さが$156\frac{1}{4}$ グレーン，水中での重さが 77 グレーンであった一つの球体が，112 インチの全高を 4 秒間で描いた．そして実験を繰り返してみると，球体はやはり落下に際して同じく 4 秒間を費やした．この球体の真空中における重さは$156\frac{13}{38}$ グレーンであり，またこの重さが水中における球体の重さを超過する量は$79\frac{13}{38}$ グレーンである．ゆえに球体の直径は 0.84224 インチである….…水の密度と球体の密度との比になるであろうし，また球体の直径の$\frac{8}{3}$（すなわち 2.24597 インチ）と距離 2F との比になるであろう．したがって 2F は 4.4256 インチ…．…112.08 インチという距離が得られるが，これがこの木箱内の水中を落下する球体が，この理論により，4 秒間に描く大体の距離である……

上記にあるように，Newton は落下距離を理論的に求める計算過程で落下させる球体の直径を導出し，その$\frac{8}{3}$ 倍を求めている．しかし，実験では何故上記のような，$\frac{8}{3}\times$直径：2F＝水の密度：球体の密度 の比を用いて計算したのかは明記されていない．

よって本発表では，実験で扱われた球体における直径の$\frac{8}{3}$ 倍を中心に，Newton がどのように流体中での落下する物体の運動を考えているのかを調査した．今回，*PRINCIPIA* の和訳は中野猿人の日本語訳（講談社，1997）を引用した．[]内の語句は中野が補った語句である．

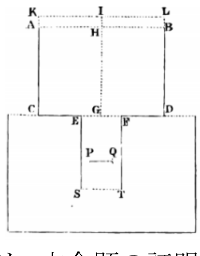
2. 抵抗を及ぼす抵抗媒質中での物体の運動

PRINCIPIA 第二編では，Ⅸ章に渡り抵抗媒質内における物体の運動を論じている．これまでにおける我々の調査結果から，Newton は同編第Ⅵ章で振子を用いた実験を行っており，そこで用いられている理論は，実験前の諸命題等で議論され，証明されている．そのため，今回取り上げた第Ⅶ章の実験に用いられている理論に関しても，同章の諸命題等から見ていく．

2-1. 第二編命題 37 定理 29 と各補助定理

第二編で直径の$\frac{8}{3}$ 倍を用いた議論をしているのは，命題 38 定理 30 である．しかし，第二編命題 37 定理 29 と各補助定理から見ていく．これは，命題 38 定理 30 にて命題 37 定理 29 と各補助定理の議論を適用しているためである．Newton は命題 37 定理 29 では次のように述べている．

> ……もし円柱が，圧縮された，無限に広い，非弾性流体内をその長さの方向に一様に前進するならば，その横断面の大きさから生ずる抵抗と，それがその長さの 4 倍を進む時間内にその全運動[量]を失わせ，あるいは生じさせるような力との比は，媒質の密度と，円柱の密度との比にほぼ等しい．……



続けて，Newton は本命題に対して，右図を用いて命題 36 問題 8 の議論を適用し，導管内に流体を満たして，その中にある小円板の上昇を考える．そこで小円板の持つ速度と，その横を流下する流体の速度の比を考えている．その後，彼は導管の幅を無限にして議論を進め，本命題の証明を終えている．その後，注，補助定理 5，6 を通し，補助定理 7 では等しい幅を持つ円柱，球，回転楕円体を考え，導管内を等しい速度で動く場合に，その諸物体の受ける抵抗は互いに等しいと結論付けている．

2-2. 第二編命題 38 定理 30

Newton は命題 38 定理 30 で次のように論じている．

> ……球体が，圧縮された無限に広い非弾性流体を一様に進行するときは，それの抵抗と，それがその直径の$\frac{8}{3}$をえがく時間のうちにその全運動[量]を失わせ，あるいは生じさせるような力との

1：日大理工・院（前）・物理，2：日大理工・教員・物理

比は, ほぼ流体の密度と球体の密度との比になる. ……

ここで, Newton は球とそれに外接する円柱を考え, 命題 37 定理 29 における議論を適用させて, 概要次のように証明している.

……なぜならば, 球体[の体積]と, それに外接する円柱[の体積]との比は, 2 : 3 の比になる. …円柱がその直径の 4 倍の長さを描く間に, その円柱の全運動[量]を失わせる力は, 球体がこの長さの$\frac{2}{3}$倍, すなわちそれ自身の直径の$\frac{8}{3}$倍を描く間に, その球体の全運動[量]を失わせるであろう. …（命題 37 により）円柱の抵抗とこの力との比は, ほぼ流体の密度と円柱あるいは球体の密度との比に等しく, かつ（補助定理 5,6,7 により）球体の抵抗は円柱の抵抗に等しいからである. ……

続けて命題 37 定理 29 の系Ⅰと系Ⅱでは, 次のように述べている.

……系Ⅰ.無限に広い, 圧縮された媒質内での諸球体の抵抗は, 速度の自乗比と, 直径の自乗比と, 媒質の密度比との相乗積の比でおこなわれる.

系Ⅱ.一つの球体が…抵抗する流体内を降下しうる最大速度は, それが同じ重さでもって, 何ら抵抗をも受けることなく, その直径の$\frac{4}{3}$に対し, 球体の密度と流体の密度との比をなすような距離を描いて落下するときに得る速度に等しい. なぜならば, その落下の時間中, 落下によって得た速度で動く球体は, その直径の$\frac{8}{3}$に対し, 球体の密度と流体の密度との比をなすような距離を描くであろう. またこの運動[量]を生じさせる重力と, 球体が同じ速度でその直径の$\frac{8}{3}$を描く時間のうちに, 同じ運動[量]を生じさせることのできるような力に比は, 流体の密度と球体の密度との比をなすであろう. したがって（本命題により）重力は抵抗力に等しくなり, 球体を加速させることができないからである. ……

Newton は本命題系Ⅱで, 直径の$\frac{4}{3}$倍を考えている. これは同編同章の命題 35 問題 7 の議論を適用していると考えられるので, 次に命題 35 問題 7 を見る.

2-3. 第二編命題 35 問題 7

Newton は命題 35 問題 7 において, 媒質が互いに等しい距離を隔てて自由に配列した, かつ極めて微小な微粒子を想定し, その微粒子の反発力が最大, 零, 中間の場合を考えている. そして, その媒質中を進む球体の受ける抵抗を求めるための比を導出している. Newton は, 各々の場合を概略次のように述べている.

……場合 1.…衝突する媒質の微粒子は…大きな反発力をもってはねかえる…. …したがって球体は…その直径の$\frac{2}{3}$を描く時間の間に…抵抗と, それによって全運動［量］が取り去られ, または生成される力との比が, 媒質の密度と球体の密度の比に等しいような, そういう抵抗を受ける……

……場合 2.…球体あるいは円柱に衝突する媒質の微粒子が反撥されないものと仮定しよう…. …前の場合の半分の抵抗を受ける…….

……場合 3.…媒質の微粒子が…中間の強さの反撥力で球体からはねかえされる…場合 1 の抵抗と場合 2 の抵抗との間にある…….

その後, Newton は系Ⅰで次のように述べている.

……系Ⅰ.ゆえに, もし球体および諸微粒子が無限に硬く, あらゆる弾性力, …反撥力を欠くならば, 球体の抵抗と, その球体がその直径の$\frac{4}{3}$を描く時間の間にその全運動[量]を失わされ, あるいは生じさせられるような力との比は, 媒質の密度と球体の密度に等しいであろう. ……

以上, Newton が *PRINCIPIA* における落下実験で用いた理論の一部を見てきた. これより, 球体の直径の$\frac{8}{3}$倍は, 命題 37 定理 29 の円柱がその直径を 4 倍の長さを描くという議論を基にして, 導出されていることが分かった.

3. 総括と今後の課題

本調査により, Newton がどのように球体の直径の$\frac{8}{3}$倍を取り扱っていたのかを明らかにした. 彼は, 球体の受ける抵抗と, その直径の$\frac{8}{3}$をえがく時間のうちにその全運動量を失わせ, あるいは生じさせるような力との比は, ほぼ流体の密度と球体の密度との比になるという議論から, 球体の直径の$\frac{8}{3}$倍に対して球体の密度と流体の密度との比をなすような距離を描くという結論に達し, 力のつり合いを議論している. そこで彼は, 終端速度の議論を行い, 等速直線運動を行う条件を提示していることが分かった. また, これらの比を導出するための計算では, 密度の比を中心に議論していると思われる.

以上, Newton がどのように流体中での落下する物体の運動を考えているのかを明らかにした. ここで, 落下運動を議論する上で, 彼が空間を満たす流体をどのように考えていたか考察する必要がある. Newton は *PRINCIPIA* 第二編第Ⅴ章の冒頭で, 以下のように流体を定義している.

……流体とは, その諸部分がそれに加えられた任意の力に屈服し, かつ屈服することによって容易にそれら自身の間で動かされるような任意の物体をいう. ……

上記の定義からは, 流体の具体的描像は読み取れない. しかし, 諸命題の記述から, 非弾性流体とは流体を構成する諸微粒子が無限に硬く, 反発力が無いものと, 彼が想定していることが分かる. さらに流体を構成する微粒子と物体との衝突を議論していることから, Newton の考える流体には, 原子論的自然描像が覗える. 一般に Newton は, R. Boyle の原子論的自然描像の影響を受けていると言われているが, Newton が流体を取り扱う上でも彼の影響が見出された.

本研究では, 落下実験の理論の全てを解明するには至らなかったので, 他の理論の解明に関しては今後の課題とする.