O-2

時空の量子化と量子重力の関係

Relation between quantum gravity and quantizatied of space-time

○勝木陽久[1]　仲滋文[2]
*Haruhisa Katsuki[1],Shigefumi Naka[2]

Abstract: Quantum gravity is one of the most important end in quantum field theory, since the gravitational field is universal and is related to the spacetime structure. On the other side, quantum gravity is also expected to give a quantized spacetime such as κ-Minkowski spacetime, which is important in Planck energy physics. In this work, we tried to study the relationship between quantum gravity and quantized spacetime based on the $3+1$-decomposing of spacetime variables in canonical formulation of general relativity.

1．はじめに

量子重力理論の定式化は場の量子論の重要課題の一つである．一般的には重力場の理論はくり込み可能ではないためその量子化には様々な試みがなされており, 弦模型を基礎としてこれらの問題が大きく改善されることも期待されている．一方, 重力場が量子化されているとすれば重力場は重力子として伝達するため, 300 万光年離れた天体からの重力波も観測可能となり, 実際に検証が進められている．このような重力場の量子化は時空の計量の量子化を通して議論されているが, 計量の量子化は時空座標そのものの量子化にも関係する．近年, プランクエネルギーの世界では時空座標そのものの量子化ともいえる κ-Minkowski 時空の議論が多くなされているが, これを量子重力のある種の極限として導く試みは, 必ずしも明確な結論を出してはいない．本研究では計量の構造が定まった背景時空上では時空座標で表すことができるということに注目し, 背景時空上での計量の量子化と時空座標の量子化の関係性を調べ, 時空の非可換な構造を導くことを目標とする．具体的には, $3+1$ 分解という手法で時間座標と空間座標を分離し, この時間の下での正準量子化の意味で与えられた背景時空に対応する計量の量子化と時空座標の量子化の関係性を調べる．

2．時空の $3+1$ 分解

重力を量子論的に扱う為に, 時間的な変化と空間的な変化を区別して考えなくてはならない. この考えの方法として, 4 次元時空に対し $\Sigma \times R$ という分解を行う手法がある. Σ は $t(x) = \mathrm{const}$ を満たす空間的な超曲面を表す三次元多様体であり, R は $t(x) = \mathrm{const}$ の値を動かしてできる時間的な推移を表す数直線である．ここで, Σ に垂直になるようにベクトル n^μ をとり, Σ の接線と法線の方向にベクトル $t^\mu = Nn^\mu + N^a$ という分解を行う．ただし, t は定時間 x^0 そのものでなくてもよいことに注意する.

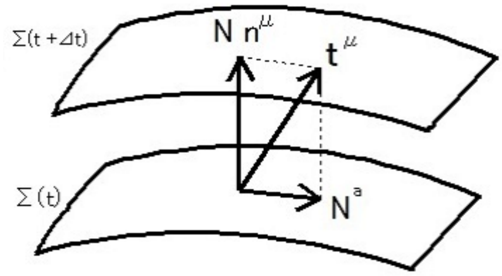

図 1. 時空の $3+1$ 分解

このとき, N と N^a はそれぞれ lapse function, shift vector と呼び, 計量 $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + h_{ab}N^aN^b & N_a \\ N_b & h_{ab} \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書くことができる．また, 外部曲率 K_{ab} を h_{ab} のリー微分として

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab} \tag{2}$$

と定義しておくと, Einstein-Hilbert action から導き出される超曲面上での Lagrangian は

$$L = \int d^3xN\sqrt{h}\left({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) \tag{3}$$

[1]日大理工・院（前）・物理
[2]日大理工・教員・物理

である. これにより, 力学変数 h_{ab} に対応する正準運動量 $\tilde{\pi}^{ab}$ は

$$\tilde{\pi}^{ab} = \frac{\delta L}{\delta \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h}\left(K^{ab} - h^{ab}K\right) \tag{4}$$

とわかる. したがって Poisson 括弧をとると

$$\left\{h_{ab}(x), \tilde{\pi}^{cd}(y)\right\} = \delta^c_{(a}\delta^d_{b)}\delta(x,y) \tag{5}$$

となる. 形式的には, Poisson 括弧を交換関係に置き換える事により量子論に移ることができるが, $\det(h_{ab}) > 0$ の様な条件を反映させる問題があり, これを回避する方法として Ashtekar 変数を用いる手法がある。

3．Ashtekar 変数

3 次元多様体に $h_{ab}e^a_i e^b_j = \delta_{ij}$ の関係を満たす triad $e^a_i(x)$ を導入し, 新しい正準変数を以下のように定義する.

$$\tilde{E}^a_i(x) \equiv \sqrt{h}(x)e^a_i(x) \tag{6}$$

この正準変数 $\tilde{E}^a_i$ に正準共役な変数として A^i_a を G を万有引力定数として, 以下のように導入する.

$$GA^i_a(x) = \Gamma^i_a(x) + \beta K^i_a(x) \tag{7}$$

このとき, Poisson 括弧

$$\left\{A^i_a(x), \tilde{E}^b_j(y)\right\} = 8\pi\beta\delta^i_j\delta^b_a\delta(x,y) \tag{8}$$

$$\left\{A^i_a(x), A^j_b(y)\right\} = 0 \tag{9}$$

の満たされることがわかる. また, Gauss conditon の構造を持つ

$$\mathcal{G}_i = \partial_a E^a_i + G\epsilon_{ijk}A^j_a E^{ka} = \mathcal{D}_a E^a_i \approx 0 \tag{10}$$

は, $SO(3)$ algebla

$$\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} = \epsilon^k_{ij}\mathcal{G}_k(x)\delta(x,y) \tag{11}$$

を満たすことが確かめられ, 3+1 分解の下での重力理論が gauge theory と等価であることがわかる. このとき, 物理的な状態を定める条件は Gauss condition のみとなり, h_{ab} を用いた際の問題は現れない.

4．de Sitter 時空との関連

3 + 1 分解で求めた結果と de Sitter 時空との関連を調べる. まず, 5 次元の de Sitter 時空は $-(x^0)^2 + (x^i)^2 + (x^4)^2 = l^2$ であり, ここから導き出される計量と 3 + 1 分解で扱う変数との関係は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{l^2 - \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta} \tag{12}$$

$$= \begin{pmatrix} -N^2 + h_{ab}N^a N^b & N_a \\ N_b & h_{ab} \end{pmatrix} \tag{13}$$

である. この関係から de Sitter 時空上での lapse function, shift vector, 計量 h_{ab} はそれぞれ

$$N^2 = \frac{l^2}{l^2 + (x^0)^2} \tag{14}$$

$$N_a = \frac{x_a x_0}{l^2 - \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta} \tag{15}$$

$$h_{ab} = \delta_{ab} + \frac{x_a x_b}{l^2 - \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta} \tag{16}$$

と求まる. この場合 $t = x^0$ を選ぶと, x^0 はパラメーターとして分離され, h_{ab} と (5) の Poisson 括弧から κ-Minkowski 型の非可換性を導くことはできない. これを導く為には, $t(x)$ に空間座標を含める, あるいは AdS 時空の扱うもう一つの時間座標を含んだ枠組みで考えるなどが必要である. これらは最終的には Ashtekar 変数を用いた形で定式化すべきである.

5．まとめと今後の課題

本研究では 3 + 1 分解に基づく重力場の量子化と, 時空の量子化の関係を調べた. 簡単な模型として de Sitter 型背景時空の下での時空変数の量子化を調べたが, κ-Minkowski 型の構造は得られなかった. 今後は背景時空として, AdS 時空など他の背景時空も調べることにより, 非可換な時空構造が導出できるのではないかと期待している. また, 計量の量子化の手法として Ashtekar 変数を用いた Loop 量子化の手法を調べ, Loop 量子化で求めた計量と時空座標との関連も調べていきたい.

6．参考文献

[1]Gambini, R. and Pullin, J. (2011). *A first course in loop quantum gravity.* Oxford University Press, Cambridge.

[2]Kiefer, C. (2006). *Quantum Gravity.* Oxford Science Publications, Oxford.

[3]Yoonbai Kim, Chae Young Oh, and Namil Park, arXiv:hep-th/0212326v1 29 Dec 2002.

[4]J.Kowalski-Glikman: *Introduction to Doubly Special Relativity*, Lect. Notes Phys. 669, 131-159 (2005)