O-21

特異点定理の再考
一般相対論による古典的な時空の構造理解

Review of the singularity theorems

Classical interpretation of space-time structure

○山口知与
*Chiyo Yamaguchi

Abstract: Singular theorems by R.Penrose and S.W. Hawking show the existence of singularities under some conditions in the space-time. 1. the existence of global hyperbolicity 2. the existence of closed trapped surface 3. enegy conditions are satisfied. They are based on Einstein's General Theory of Relativity. But the space-time that can be described by Einstein equation is only a larger scale than Planck length. So at first, I review singular theorems, then discuss some simple toy model of treating a Planck length space-time which is based on the idea of superstring theory.

1. Introduction

特異点定理とは，R.ペンローズと S.W. ホーキングによって示された，時空が特異点を持つ条件の総括であり，それらの条件はいずれも，一般相対論で記述出来る時空にて自ずと帰結するものである．時空が特異点を持つとは，少なくとも1つの不完全な測地線があるということである．時空は重力場の作用により歪んでいる．平坦で無い面上の曲線に沿ったある点での接ベクトルを，曲線に沿って移動させた時，元の接ベクトルとは平行にはならない．これに対し測地線とは，接ベクトルが曲線に沿って移動しても，常に平行に保たれる曲線のことである．そして測地線が不完全であるとは，測地線に沿ったパラメータが任意の値を取れないということである．例えば時間的測地線が不完全な場合，固有時に上限または下限があることになり，それはつまりこの時空に終わり又は始まりがあるということになる．これはそれぞれ，ビッグクランチ特異点や，初期特異点に当たる．

2. Singularity theorems

特異点定理を総括すると以下の時，時空は不完全な測地線を持つと言える．

(1) $R_{ab}K^aK^b \geq 0$ が全ての時間的又はヌル的(非空間的)ベクトル K について成り立つ

(2) 捕捉面，又はそれに準ずる領域が存在する

(3) 時空が大域的双曲的な構造を持つ

(3)について．大域的双曲的な領域では，強い因果律条件が成立する．強い因果律条件とは，閉じた非空間的曲線が存在しないというものであり，未来と過去は決して同一にはならないこと等を表している．また大域的双曲的な領域内に非空間的曲線により連結された 2 点がある時，その曲線の長さを極大にするような非空間的測地線が存在する．

捕捉面とは，それと直交するヌル測地線は，入るものも出るものも共に収束するような閉じた二次元面のことであり，この面上では，隣り合う測地線の拡張率 θ はどこでも負となる．

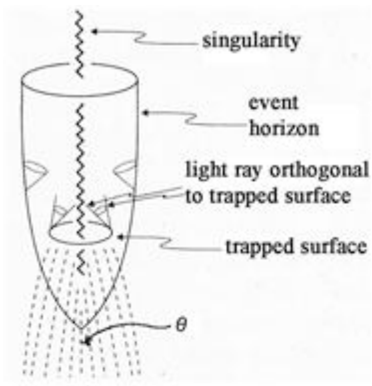

Fig1. Homogeneous dust cloud collapse

(1)と(2)は互いに関わりがあり，どちらも Raychaundhuri の式より導かれている．

$$\frac{d}{d\tau}\theta = -R_{ab}K^aK^b - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 \quad \cdots(1)$$

σ は歪みを表す． $R_{ab}K^aK^b$ が負であれば，時間的測地線束は収束することになる．

エネルギー密度は古典論では負となることは無いので, $T_{ab}K^aK^b \geq 0$ (weak energy condition) であることを考慮し,

日大理工・院(前)・物理

R_{ab} を Einstein 方程式より求めると，(1) は

$$T_{ab}K^aK^b \geq K^aK_a(\frac{1}{2}T - \frac{\Lambda}{\kappa^2})$$

と言い換えられる．$\Lambda = 0$ で不等式が成立する時，strong energy condition が成立するという．

θ は，測地線束の微小面積$|A|$の変化率とも言え(A は 3×3 行列), $\theta = \dot{(|A|)}/|A|$ だとすると，$\theta \to \pm\infty$ の時，$|A| \to 0$ となる．($\dot{(|A|)}$ は有限) この意味を考えると，2 点 p，q を繋ぐ測地線 γ があるとして，p に無限に接近した測地線が，p と q の間で γ と再び交わる点と言える．この交点を共役点という．この点があれば γ を変化させてもっと長い曲線にすることが出来る．このことは，Fig2 のように地球上の 3 点を考えると分かり易い．逆に言えば, p と q の間の曲線が最長となるには，共役点がその間に無ければ良い．

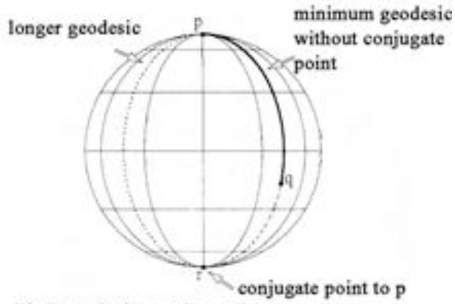

Fig2. geodesics on the earth

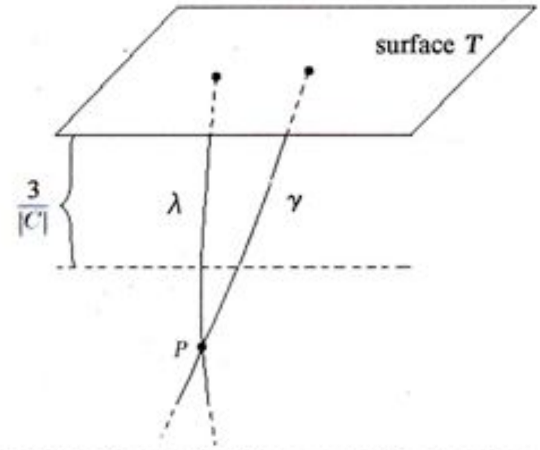

Fig 3. timelike geodesics that are supposed to be longer than 3/|C|. A variation λ can give a longer timelike geodesic γ. Then γ shouldn't have a conjugate point to T.

(1)式より $d\theta/d\tau + 1/3 \quad \leq 0$ を解くと，

$$\frac{1}{\theta(\tau)} \geq \frac{1}{3}\tau + \frac{1}{\theta_0} \quad (\tau = 0 \text{ の時 } \theta_0 < 0) \qquad \cdots(3)$$

となり, $0 < \tau < 3/|\theta_0|$ で $\theta = -\infty$ となり，共役点を持つ．

捕捉面に準ずる面 T (宇宙の全時間的測地線が直交し，それらに対し至る所で $\theta \leq C < 0$ となっている 2 次元面)を考える．T を通る過去向きの時間的曲線で，T から出て $3/|C|$ より大きい長さを持つ曲線 λ があるとする. $3/|C|$ より向うにある λ 上の点を p とすると，大域的双曲性の構造より，p と T の間で最大長を持つ曲線 γ があり，これは先の話より，T と p の間に共役点を持たない筈である．これは，式(3)により示されたことに矛盾する．つまり T を通る過去向きの時間的測地線は $3/|C|$ までしか伸ばせられず，不完全である．これは初期特異点に当たる．

3. Further discussion

特異点定理は，量子効果を考えない，一般相対論を基に考えられたものだった．しかし実際には，宇宙がプランク長くらいのスケールになれば，古典的な物理理論は破綻する．よってプランク長程度のスケールを記述出来る，量子論の効果も含めた補正が必要となるだろう．そこで，プランク長以下の領域も記述出来得ると考えられている，超弦理論で示されている補正項 $\frac{\mu'}{2}R_{a\mu\beta\rho}R_b^{\mu\beta\rho}$ を用いて, Einstein 方程式を以下のように直す．

$$R_{ab} + \frac{\mu'}{2}R_{a\mu\beta\rho}R_b^{\mu\beta\rho} = \kappa^2(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T) \qquad \cdots(4)$$

ここでは補正項による影響を明確にするため，$\Lambda = 0$ と仮定した，実験的なモデルを考える．宇宙は空間的には一様等方であるとし，Robertson-Walker 型計量 (RW 計量) を用いて, (4)を解き, a, t を図示し，Fig 4.の破線のように，初期特異点を回避出来ないかを調べたい．

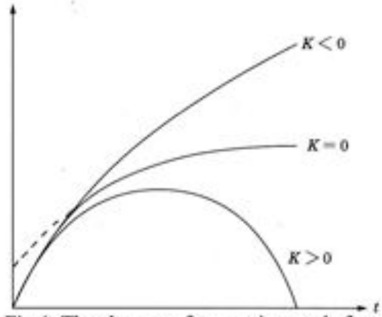

Fig 4. The changes of space-time scale factor along time by Friedmann. K is a curvature and $a(0)=0$ is singularity. The broken line is the expecting result.

4. References

[1] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis : "The large scale structure of space-time", Cambridge University Press, 1973
[2] Robert M. Wald : "General Relativity", The University of Chicago Press, 1984
[3] S.W. Hawking and R. Penrose : “The nature of space and time”, Princeton University Press, 1996
[4] 佐藤勝彦 ： 「相対性理論」, 岩波書店, 1996