

有限要素法を用いたトーラスプラズマの MHD 平衡解析

MHD equilibrium analysis with Finite Element Method in Axisymmetric Torus Plasma

丸山清二¹, 長峰康雄², 相澤正満²*Seiji Maruyama¹, Yasuo Nagamine², Masamitsu Aizawa²

We have developed the Finite Element Method code for MHD Equilibrium Analysis of Axisymmetric Torus Plasma. In this code, we have adopted the computational grid based on flux coordinate in order to improve computational accuracy and efficiency.

1. 目的

本研究は、軸対称系トーラスプラズマの MHD 平衡を、磁気座標系における有限要素法より求めることを目的としている。また、平衡解析の結果から磁気軸の探索を行う。

2. 解析モデル[1]

軸対称系トーラスプラズマの MHD 平衡配位は一般に以下に示す Grad-Shafranov 方程式(以下 G-S 方程式)を解くことによって得られる。

$$\left(R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)\psi = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (1)$$

$\psi(R, Z)$ は磁束関数、 $p(\psi)$ はプラズマ圧力、 $F(\psi)$ はトロイダル磁場関数である。プラズマの境界は非円形断面の固定境界とした。

3. 磁気座標による有限要素法

MHD 平衡を解析するために、数値解法として有限要素法を用いた。有限要素法は円形断面及び非円形断面などの形状表現を任意に扱うことが可能である。

G-S 方程式に対する有限要素法の適用には重み付き残差法を用いた。G-S 方程式の重み付き残差方程式は次式で表せる

$$\iint_{\Omega} \psi^* \left(\nabla^2 \psi - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} - f(R, \psi) \right) dR dZ = 0 \quad (2)$$

重み関数を ψ^* とし、 Ω は解析領域を表し、領域を囲む境界上 $\partial\Omega$ において $\psi^* = 0$ を境界条件とする。 $f(R, \psi)$ は(1)式の右辺である。

$$f(R, \psi) = -\mu_0 R^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (3)$$

(2)式第 1 項について Green の定理により部分積分を行い、また境界上における基本境界条件 $\int_{\partial\Omega} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\tau = 0$

($d\tau$ は $\partial\Omega$ にそった線要素)を用いることにより、弱形式の積分方程式(4)式が得られる。

$$\iint_{\Omega} \psi^* \left\{ \frac{\partial \psi^*}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial \psi^*}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{1}{R} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial R} \right\} dR dZ$$

$$+ \iint_{\Omega} \psi^* f dR dZ = 0 \quad (4)$$

(4)式を有限要素法により離散化すると有限要素方程式が得られる。要素分割として、今回は三角形要素を用いた離散化を行った。三角形要素の形状関数は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ R \\ Z \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} a_i = \left(\frac{1}{2\Delta}\right)(R_j Z_k - R_k Z_j) \\ b_i = \left(\frac{1}{2\Delta}\right)(Z_j - Z_k) \\ c_i = \left(\frac{1}{2\Delta}\right)(R_k - R_j) \end{cases} \quad (6)$$

 $(i, j, k) = \text{cyclic}$

ここで、 (i, j, k) は三角形要素の頂点番号、 Δ は要素面積をそれぞれ示す。(Fig.1)

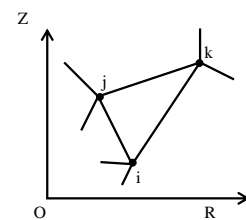


Fig.1 線形三角要素

また、 ψ 、 ψ^* 及び f における要素内補間関数は、(5),(6)式の形状関数を用いて以下のように近似した。

$$\begin{aligned} \psi_e(R, Z) &= \sum_i N_i \psi_i \\ \psi^*_e(R, Z) &= \sum_i N_i \psi^*_i \\ f_e(R, Z) e f &= \sum_i N_i f_i \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 i は三角形の頂点についての和、 e はそれぞれの要素を表す。前述の弱形式(4)式を要素毎の積分の和で表し、上式を代入し離散化することにより、有限要素近似された弱形式が得られる。

G-S 方程式(1)は右辺の $P(\psi), F(\psi)$ が未知数 ψ の関数であるため、繰り返し収束計算によって解を求めた。

4. 数値解析の方法 [2]

有限要素近似された G-S 方程式は、大規模係数行列の連立 1 次方程式となる。また、行列成分の大部分が 0 の疎行列で、非零成分が対角成分を中心とする帯行列となる。本研究ではこの帯行列を計算するために修正コレスキー分解法を用いた。修正コレスキー分解は対称行列 A を係数行列に持つ連立 1 次方程式 $Ax = b$ の A を下三角行列 L と上三角行列 L^T 対角行列 D に分解することである。

$$A = L D L^T \tag{8}$$

分解した対称行列 A より

$$Ax = L D L^T x = Ly = b \tag{9}$$

の関係を利用することにより次の二つの方程式を解いて解 x を求める。

$$\begin{cases} Ly = b \\ DL^T x = y \end{cases} \tag{10}$$

帯行列に対して修正コレスキー分解を行う場合は対角線からもっとも遠く離れている非零成分までの距離半帯幅 m の行列に元の行列を変換し分解を行う。これにより大きな作業領域を計算機が必要としなくなり分解を行うことができる。

有限要素法の計算格子は磁気面に沿った形にしたい為、磁気座標系を用いた計算格子とした。(Fig.2)

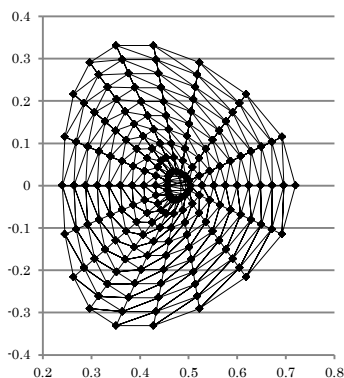


Fig.2 磁気座標系計算格子

計算格子の生成には非円形断面を扱う為、次式を用いた。

$$\begin{aligned} R(\theta) &= R_0 + a \cos(\theta + \delta \sin \theta) \\ Z(\theta) &= \kappa \sin \theta \end{aligned} \tag{11}$$

κ, δ は楕円度、三角度をそれぞれ示す。 R, θ 毎に等間隔に分割し計算格子の生成を行った。

5. 計算結果

以上の原理を用いて、実際にトカマクプラズマに関する計算を行った結果。トカマク平衡の計算パラメータは以下のようにした。

計算パラメータ	設定値
アスペクト比	2.0
楕円度、三角度	1.4, 0.4
中心圧力	4.2kPa
圧力分布乗数	(2,1)
TF Coil電流 I_{fc}	210kA
ポロイダル電流 I_θ	100kA

以下が計算結果である。

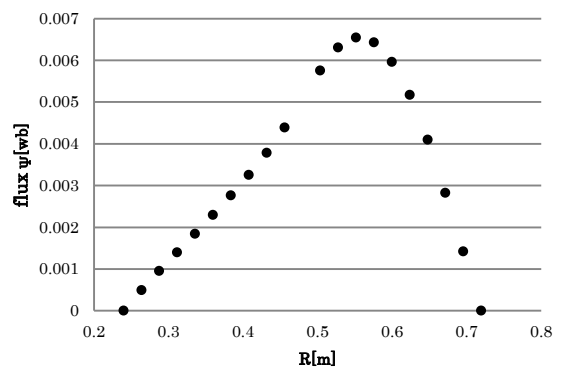


Fig.3 赤道面上における磁束関数の分布

この結果より、トカマクの中心から離れた $R = 5.52 \times 10^{-1}m$ において $\psi = 6.54 \times 10^{-3}wb$ が最高値となり磁気軸となる。

6. 結論と課題

軸対称系トーラスプラズマの MHD 平衡を、有限要素法を用いた磁気座標系計算格子を用い解析する事ができた。解析結果より従来の矩形メッシュと同等の収束解を得ることが出来、より正確な MHD 平衡解析を行うことが期待出来る。

今後の課題としては計算格子を磁気面に合わせて再構成していくことで計算精度を向上させることがあげられる。すなわち計算結果から求められた磁気軸を計算格子の中心とし、計算格子を作り直すことにより、高精度かつ高速に収束が行われると考えられる。

参考文献

- [1] 宮本健朗：「プラズマ物理・核融合(東京大学出版会)」，2004年
- [2] 森正武：「FORTRAN77 数値計算プログラミング増補版(岩波コンピュータサイエンス)」，1992年
- [3] 中山司：「流れ解析のための有限要素法入門(東京大学出版会)」，2008年