O-29

スピナー変数を用いたスピンをもつ無質量粒子と rigid particle

Massless spinning particles written in terms of spinor variables and the rigid particle

○鈴木隆史[1]，　出口真一[2]
*Takafumi Suzuki[1], Shinichi Deguchi[2]

Abstract : We study a relation between the action of a massless spinning particle written in terms of spinor variables and the action of the rigid particle.

1．導入

これまでに，スピンをもつ粒子の古典力学的な記述に関して様々な研究がなされてきた．その中の１つに，スピナー変数を用いて記述されるスピン (ヘリシティ) をもつ無質量粒子の作用がある．この作用は，Shirafuji によって研究された無質量粒子のツイスター形式の作用に基づいて与えられる [1]．他方で，粒子が描く世界線の曲率を取り入れた作用がスピンをもつ無質量粒子を記述することが知られている．この無質量粒子は rigid particle と呼ばれ，Plyushchay によって考察された [2, 3]．前者の作用には粒子の軌跡を表す時空変数だけでなくスピン自由度を与えるためのスピナー変数が導入されているが，後者は粒子の軌跡を表す時空変数だけで記述されている．そのため，この２つの作用の関係は明確ではない．本研究では，運動方程式を用いることで，上で述べた２つの作用の古典的な関係を考察する．

まず，我々は相対論的自由粒子の作用を基にスピナー表現でのスピンをもつ無質量粒子の作用を与える．また，我々は相対論的自由粒子が描く世界線の曲率を積分することで rigid particle の作用を得る．その後，我々は新たな１次の作用を与えて，この作用の運動方程式を求める．運動方程式の解を用いて，１次の作用から得られる等価な作用を導出する．その結果，導かれた作用がスピナー変数を用いたスピンをもつ無質量粒子の作用と rigid particle の作用とが一致していることを確かめる．

2．スピンをもつ無質量粒子の作用

我々は４次元時空における相対論的粒子の世界線を固有時間 τ の関数として，$x^\mu(\tau)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ とする．このとき，質量 m の相対論的自由粒子の作用は $S_1 = -m\int d\tau\sqrt{\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu}$ $(\dot{x}^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau})$ と表せる．しかし，この作用は無質量粒子 $(m=0)$ には適用できない．そこで，補助変数 $e(\tau)$ を導入して，S_1 を $S_2 = -\int d\tau(\frac{1}{2e}\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu - \frac{e}{2}m^2)$ と書き換える．この式で $m=0$ とおくと，無質量粒子の作用が $S_2 = -\int d\tau\frac{1}{2e}\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu$ と得られる．さらに，補助変数 $p_\mu(\tau)$ を導入して，x_μ と p_μ のスピナー表現 $x_{\alpha\dot{\alpha}}$ と $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ $(\alpha = 0,1;\dot{\alpha} = \dot{0},\dot{1})$ を用いると，S_2 は次のように表せる: $S_3 = \int d\tau(-p_{\alpha\dot{\alpha}}\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{e}{2}p_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\alpha\dot{\alpha}})$．このとき，$e$ に関する変分から $p_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\alpha\dot{\alpha}} = 0$ が導かれる．この式は２成分スピナー $\bar{\pi}_\alpha$ と $\pi_{\dot{\alpha}}$ を用いて，$p_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}}$ と解ける．この結果を S_3 に代入すると，次式が得られる: $S_4 = \int d\tau(-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}})$．ここで，新たな２成分スピナー $\psi^\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ および補助変数 $a(\tau)$ とスピンを表す数 s を導入して S_4 を書き換えると，スピナー変数によるスピンをもつ無質量粒子の作用が次のように得られる:

$$S_5 = \int d\tau\Big[-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}} - i(\psi^\alpha\dot{\bar{\pi}}_\alpha - \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\dot{\pi}_{\dot{\alpha}}) + \frac{1}{2}a\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} - 2\alpha\right)\Big] =: \int d\tau L_5\,. \qquad (1)$$

次に，相対論的自由粒子の無限小距離は $ds = \sqrt{|\dot{x}^2|}d\tau$ と書けるので，粒子の方向ベクトル (正規化された速度ベクトル) は $e_1^\mu(\tau) := \frac{\dot{x}^\mu(\tau)}{\sqrt{|\dot{x}^2|}} = \frac{dx^\mu}{ds}$ と与えられる．このとき，粒子の曲率は方向ベクトルの変化率で表される．しかし，τ で微分すると，曲率の値は τ の取り方で変わってしまう．そのため，τ の取り方によらずに曲率の値が定まるように，方向ベクトルの曲線の長さ当たりの変化率を曲率ベクトル $k^\mu(\tau) := \frac{de_1^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ として，曲率 k を $k := \sqrt{|k^2|} = \sqrt{|(\frac{d^2x^\mu}{ds^2})^2|}$ と定義する．無次元の定数 α を導入して，曲率 k を ds で積分すると次の作用が得られる:

$$S_r = -\alpha\int kds = -\alpha\int\sqrt{\frac{\ddot{x}_\perp^2}{\dot{x}^2}}d\tau =: \int d\tau L_r\,. \qquad (2)$$

ただし，$\ddot{x}_\perp^\mu := \ddot{x}^\mu - \dot{x}^\mu\frac{\ddot{x}^\nu\dot{x}_\nu}{\dot{x}^2}$ を定義して，$\dot{x}^2 < 0, \ddot{x}_\perp^2 < 0$ を仮定した．作用 S_r が記述する無質量粒子は rigid particle と呼ばれて，α はスピンを表す数となる．

3．スピンをもつ無質量粒子の作用を導く作用

我々は $(x^\mu, q^\mu, p_\mu, r_\mu, a, b)$ を正準座標として，作用 $\tilde{S}_1 = \int d\tau\tilde{L}_1$ を考える．ただし，$\tilde{L}_1$ は次式で与えられる:

$$\tilde{L}_1 := (q^\mu - \dot{x}^\mu)p_\mu - \dot{q}^\mu r_\mu + bq^\mu r_\mu + a(\sqrt{q^2r^2} - |\alpha|) \qquad (3a)$$

$$= (q^{\alpha\dot{\alpha}} - \dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}})p_{\alpha\dot{\alpha}} - \dot{q}^{\alpha\dot{\alpha}}r_{\alpha\dot{\alpha}} + bq^{\alpha\dot{\alpha}}r_{\alpha\dot{\alpha}} + a(\sqrt{q^2r^2} - |\alpha|). \qquad (3b)$$

---
[1] 日大・短大　 [2] 日大・量科研

式 (3b) の $x^{\alpha\dot{\alpha}}, q^{\alpha\dot{\alpha}}, p_{\alpha\dot{\alpha}}, r_{\alpha\dot{\alpha}}, a$ と b に関するオイラー・ラグランジュ方程式から，次の 4 つの拘束条件が得られる:

$$q^{\alpha\dot{\alpha}}r_{\alpha\dot{\alpha}}=0,\ q^{\alpha\dot{\alpha}}p_{\alpha\dot{\alpha}}=0,\ p^{\alpha\dot{\alpha}}r_{\alpha\dot{\alpha}}=0,\ p^{\alpha\dot{\alpha}}p_{\alpha\dot{\alpha}}=0. \quad (4)$$

この連立方程式の解は，次のように求まる:

$$\begin{aligned} p_{\alpha\dot{\alpha}} =&\bar{\pi}_\alpha \pi_{\dot{\alpha}}, \\ q^{\alpha\dot{\alpha}} =&f(\tau)(\bar{\pi}^\alpha \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \psi^\alpha \pi^{\dot{\alpha}}), \\ r_{\alpha\dot{\alpha}} =&ig(\tau)(\bar{\pi}_\alpha \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} - \psi_\alpha \pi_{\dot{\alpha}}). \end{aligned} \quad (5)$$

ただし，f, g は任意の実関数である．このとき，$q^2 = q^{\alpha\dot{\alpha}}q_{\alpha\dot{\alpha}}$ と $r^2 = r^{\alpha\dot{\alpha}}r_{\alpha\dot{\alpha}}$ は

$$q^2 = -2f^2|\psi^\alpha \bar{\pi}_\alpha|^2 < 0, \quad r^2 = -2g^2|\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha|^2 < 0 \quad (6)$$

となる．ここで，q^μ は rigid particle の作用における $\dot{x}^\mu$ に対応しているので，$q^2 < 0$ は rigid particle の作用における $\dot{x}^2 < 0$ と矛盾していないことに注意する．いま，我々は任意の実関数 $R = R(\tau)$ と $\theta = \theta(\tau)$ を導入して，$\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha$ を $\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha = Re^{i\theta}$ と表して，fg を $fg = 1/|\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha|$ と選ぶ．いま，式 (5) を式 (3b) に代入すると，次式が得られる:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2 =& -\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}'_\alpha \pi'_{\dot{\alpha}} - i(\psi'^\alpha \dot{\bar{\pi}}'_\alpha - \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}}\dot{\pi}'_{\dot{\alpha}}) \\ &+ \frac{1}{2}a\left(\psi'^\alpha\bar{\pi}'_\alpha + \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}}\pi'_{\dot{\alpha}} - 2|\alpha|\right). \end{aligned} \quad (7)$$

ここで，$\pi'_{\dot{\alpha}}, \psi'^\alpha, \bar{\pi}'_\alpha, \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}}$ を改めて $\pi_{\dot{\alpha}}, \psi^\alpha, \bar{\pi}_\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ と表して独立な 2 成分スピナーとして定義すれば，式 (7) は

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2 =& -\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha \pi_{\dot{\alpha}} - i(\psi^\alpha \dot{\bar{\pi}}_\alpha - \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\dot{\pi}_{\dot{\alpha}}) \\ &+ \frac{1}{2}a\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} - 2\alpha\right) \end{aligned} \quad (8)$$

と表せる．ただし，α の絶対値は $\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}}$ が正と負の両方の値をとることから外した．ラグランジアン $\tilde{L}_2$ から得られる作用はスピナー変数で記述された無質量粒子の作用である式 (1) と一致している．

次に，式 (3a) の r_μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{bq^2}{\sqrt{q^2r^2}}r^\mu = \dot{q}^\mu - aq^\mu \quad (9)$$

から得られる

$$\begin{aligned} a\sqrt{q^2r^2} =& \dot{q}^\mu r_\mu - bq^\mu r_\mu, \\ a =& \pm\sqrt{\left(\frac{\dot{q}^2}{q^2} - \frac{2b\dot{q}^\mu q_\mu}{q^2} + b^2\right)} \end{aligned} \quad (10)$$

を式 (3a) に適用すると，式 (3a) は次のようになる:

$$\tilde{L}_{r2} =(q^\mu - \dot{x}^\mu)p_\mu - \alpha\sqrt{\left(\frac{\dot{q}^2}{q^2} - \frac{2b\dot{q}^\mu q_\mu}{q^2} + b^2\right)} \quad (11)$$

となる．ただし，$\pm|\alpha|$ を改めて $-\alpha$ とした．式 (11) の b と p_μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式

$$\begin{aligned} &-\alpha\left\{\left(\frac{\dot{q}^2}{q^2} - \frac{2a\dot{q}^\mu q_\mu}{q^2} + a^2\right)\right\}^{-1/2}\left(-\frac{\dot{q}^\mu q_\mu}{q^2} + a\right) = 0, \\ &q^\mu - \dot{x}^\mu = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

の解は

$$b = \frac{\dot{q}^\mu q_\mu}{q^2}, \quad q^\mu = \dot{x}^\mu \quad (13)$$

と求まる．この解を式 (11) に代入すると，式 (11) は

$$\tilde{L}_{r3} = -\alpha\sqrt{\frac{1}{\dot{x}^2}\left(\ddot{x}^2 - \frac{(\ddot{x}^\mu\dot{x}_\mu)^2}{\dot{x}^2}\right)} = -\alpha\sqrt{\frac{\ddot{x}_\perp^2}{\dot{x}^2}} \quad (14)$$

となる．このラグランジアンから得られる作用は，rigid particle の作用である式 (2) と一致している．

4. まとめと今後の課題

我々は相対論的自由粒子の作用を基に，スピナー表現でのスピンをもつ無質量粒子の作用を与えた．さらに，相対論的自由粒子が描く世界線の曲率を求めて，積分することで rigid particle の作用を得た．我々はこれら 2 つのスピンをもつ無質量粒子の関係を調べるために，ラグランジアン (3) の作用積分を考察した．まず，式 (3b) の $x^{\alpha\dot{\alpha}}, q^{\alpha\dot{\alpha}}, p_{\alpha\dot{\alpha}}, r_{\alpha\dot{\alpha}}, a$ と b に関するオイラー・ラグランジュ方程式から拘束条件を求めて，連立方程式を満たす解を得た．このようにして得られた解を式 (3b) に代入することで，等価なラグランジアン (8) を導き，式 (8) の作用積分がスピナー変数を用いたスピンをもつ無質量粒子の作用 (1) と一致することを確かめた．また，式 (3a) の r_μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を用いて式 (11) を得た．その後，式 (11) の p_μ と b に関するオイラー・ラグランジュ方程式の解を式 (11) に代入することで，ラグランジアン (14) を求めた．すると，式 (14) の作用積分は rigid particle の作用である式 (2) と一致していることがわかった．従って，式 (3) を通して，作用 (1) と作用 (2) は等価であることが確かめられた．

スピンをもつ有質量粒子に対しても同様の考察を行うことが今後の課題となる．

参考文献

[1] T. Shirafuji, Prog. Theory. Phys. **70**, 18 (1983).

[2] M. S. Plyushchay, Mod. Phys. Lett. **A4**, 837 (1989).

[3] M. S. Plyushchay, Phys. Lett. **B243**, 383 (1990).