O-30

ツイスター理論に基づくスピンをもつ有質量粒子の正準形式
Canonical formalism of massive spinning particles based on twistor theory

○岡野論 [1]，出口真一 [2]
*Satoshi Okano[1], Shinichi Deguchi[2]

Abstract : We study a canonical formalism of massive spinning particles written in terms of commuting spinor variables. The canonical quantization of this system is performed. After the quantization, we examine the SU(N) symmetry of this system to investigate the validity of Penrose's conjecture for internal symmetries.

1．導入

これまでに，スピンをもつ粒子を記述する種々の古典力学的な模型が提案されてきた．例えば，反可換数を用いた模型として，spinning particle model や super particle model がある．また，可換なスピナー変数を用いた模型としては，剛体模型や Barut-Zanghi 模型が知られている．本研究では後者のタイプの模型として，ツイスター理論を背景に，スピン自由度をもつ有質量粒子を記述する模型を考察する．

ツイスター理論は 1967 年に Penrose によって提案された理論であり，無質量系の記述の際に有効である．ツイスター理論に基づき，可換な時空変数とスピナー変数を用いたスピンをもつ無質量粒子の模型が過去に与えられている [1]．本研究ではこの模型を有質量粒子の場合に拡張する．

ツイスター理論において，有質量系を記述するには N $(N \geq 2)$ 種類のツイスター変数を導入する必要がある．その際，理論に SU(N) 対称性が自動的に導入されるという特徴がある．Penrose らはこの対称性は素粒子の内部対称性に同一視できると予想した（SU(2) 対称性→弱アイソスピン対称性，SU(3) 対称性→フレーバー対称性）[2]．しかし，彼らはそのような予想に対する力学的考察を行っていない．そこで本研究では具体的な模型を与え，SU(N) 対称性に対する Penrose らの予想を検証する．

我々は N $(N \geq 2)$ 種類のツイスター変数を導入し，スピンをもつ無質量粒子の作用を有質量粒子の場合に拡張する [3]．このとき，力学変数をツイスター変数ではなく時空変数とスピナー変数に選び，スピンをもつ有質量粒子の作用を書き直す．これを基に Dirac の手法に従って正準形式を構成し量子化を行う．その結果として導かれる波動関数とその解を吟味し，SU(N) 対称性の物理的意味を考察すると共に Penrose らの予想と比較する．

2．スピンをもつ有質量粒子

ツイスター変数 $Z^A(\tau)$ $(A = 1,2,3,4)$ は固有時間 τ の関数として，２成分スピナー変数 $\omega^\alpha(\tau)$ $(\alpha = 0,1)$ と $\pi_{\dot\alpha}(\tau)$ $(\dot\alpha = \dot 0, \dot 1)$ の組により $Z^A := (\omega^\alpha, \pi_{\dot\alpha})$ と定義される．ツイスター変数を用いて，スピンをもつ無質量粒子の作用は次式で与えられる [4]：

$$S_0 = \int d\tau \left[i\bar Z_A \dot Z^A + a\left(\bar Z_A Z^A - 2s\right)\right]. \tag{1}$$

ここで $a(\tau)$ は補助変数であり，s は実定数である．

いま，N $(N \geq 2)$ 種類のツイスター変数 $Z_i^A = (\omega_i^\alpha, \pi_{i\dot\alpha})$ $(i = 1\cdots N)$ を導入し，作用 S_0 をスピンをもつ有質量粒子の作用に拡張する：

$$S_m = \int d\tau \left[i\bar Z^i_A \dot Z_i^A + a\left(\bar Z^i_A Z_i^A - 2s\right) + \frac{f}{2}\left(\bar\pi^{i\alpha}\pi_i^{\dot\alpha}\bar\pi^k_\alpha\pi_{k\dot\alpha} - m^2\right)\right]. \tag{2}$$

ここで $f(\tau)$ は補助変数であり，m は質量パラメータである．

作用 S_m はツイスター変数で記述されており，時空変数との関わりが明確ではない．そこで，４次元時空における粒子の座標 $x^\mu(\tau)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ のスピナー表現 $x^{\alpha\dot\alpha}(\tau)$ と新たなスピナー変数 $\psi_i^\alpha(\tau)$ を用いて $\omega_i^\alpha := ix^{\alpha\dot\alpha}\pi_{i\dot\alpha} + \psi_i^\alpha$ を定義し，作用 S_m を次のように書き直す：

$$\begin{aligned} S = \int d\tau \Big[& -\dot x^{\alpha\dot\alpha}\bar\pi^i_\alpha\pi_{i\dot\alpha} - i(\psi_i^\alpha\dot{\bar\pi}^i_\alpha - \bar\psi^{i\dot\alpha}\dot\pi_{i\dot\alpha}) \\ & - a(\psi_i^\alpha\bar\pi^i_\alpha + \bar\psi^{i\dot\alpha}\pi_{i\dot\alpha} - 2s) + \frac{f}{2}(\bar\pi^{i\alpha}\pi_i^{\dot\alpha}\bar\pi^k_\alpha\pi_{k\dot\alpha} - m^2)\Big]. \end{aligned} \tag{3}$$

式 (3) は SU(N) 変換 $\bar\pi^i{}_\alpha \to \bar\pi'^i{}_\alpha = U^i{}_j\bar\pi^j{}_\alpha$，$\pi_{i\dot\alpha} \to \pi'_{i\dot\alpha} = \pi_{j\dot\alpha}U^{\dagger j}{}_i$ (U : $N\times N$ ユニタリー行列) のもとで不変である．従って，この系は Poincaré 対称性に加え，SU(N) 対称性を持つ．以下，この作用を基にした正準形式を論じる．

3．Dirac の手法による正準形式と正準量子化

式 (3) に含まれる正準座標 $(x^{\alpha\dot\alpha}, \bar\pi^i{}_\alpha, \pi_{i\dot\alpha}, \psi_i{}^\alpha, \bar\psi^{i\dot\alpha}, f, a)$ に対する正準運動量を $(P^{(x)}_{\alpha\dot\alpha}, P_{(\bar\pi)i}{}^\alpha, P_{(\pi)}{}^{i\dot\alpha}, P_{(\psi)}{}^i{}_\alpha, P_{(\bar\psi)i\dot\alpha}, P_{(f)}, P_{(a)})$ と表す．式 (3) より得られるこの系の拘束条件は，５つの第一類拘束条件と４つの第二類拘束条件に分類される．第二類拘束条件より構成される Dirac 括弧のもとで，ψ_i^α と $\bar\psi^{i\dot\alpha}$ はそれぞれ $\bar\pi^i_\alpha$ と $\pi_{i\dot\alpha}$ の共役運動量とみなされる．結果として次の Dirac 括弧を得る：

$$\begin{aligned} &\{x^{\alpha\dot\alpha}, P^{(x)}_{\beta\dot\beta}\}_{\rm D} = \delta^\alpha{}_\beta\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta},\ \{f, P_{(f)}\}_{\rm D} = 1, \\ &\{\bar\pi^i{}_\alpha, \psi_k{}^\beta\}_{\rm D} = i\delta^i{}_k\delta_\alpha{}^\beta,\ \{a, P_{(a)}\}_{\rm D} = 1, \\ &\{\pi_{i\dot\alpha}, \bar\psi^{k\dot\beta}\}_{\rm D} = -i\,\delta_i{}^k\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta},\ \text{他の Dirac 括弧は 0}. \end{aligned} \tag{4}$$

[1] 日大理工・院・量子　[2] 日大・量科研

構成した正準形式を基に量子化を行う．Dirac の手法に従い，正準変数を演算子に置き換え，Dirac 括弧 (4) を正準交換関係に置き換える：$[\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{P}^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}] = i\hbar\,\delta^{\alpha}{}_{\beta}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$, $[\hat{f}, \hat{P}_{(f)}] = i\hbar$, $[\hat{\bar{\pi}}^{i}{}_{\alpha}, \hat{\psi}_{k}{}^{\beta}] = -\hbar\,\delta^{i}{}_{k}\delta_{\alpha}{}^{\beta}$, $[\hat{a}, \hat{P}_{(a)}] = i\hbar$, $[\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\psi}}^{k\dot{\beta}}] = \hbar\,\delta_{i}{}^{k}\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$．また，量子化の後，上で得られた５つの第一類拘束条件は物理的状態 $|\Psi\rangle$ を定める次のような条件と解釈される：[第一類拘束条件]$|\Psi\rangle = 0$．演算子 $\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\pi}}^{i}_{\alpha}, \hat{\pi}_{i\dot{\alpha}}, \hat{f}, \hat{a}$ を対角化する表現を取ると，これらの条件は波動関数 $\Psi = \Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}, \pi_{i\dot{\alpha}}, f, a)$ が満たす次の連立方程式になる：

$$\frac{\partial}{\partial f}\Psi = \frac{\partial}{\partial a}\Psi = 0\ , \tag{5}$$

$$\left[\bar{\pi}^{i\alpha}\pi^{\dot{\alpha}}_{i}\bar{\pi}^{k}_{\alpha}\pi_{k\dot{\alpha}} - m^{2}\right]\Psi = 0\ , \tag{6}$$

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}} + \bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\pi_{i\dot{\alpha}}\right]\Psi = 0\ , \tag{7}$$

$$\left[\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}} - \pi_{i\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}} - \frac{2s}{\hbar}\right]\Psi = 0\ . \tag{8}$$

式 (6) は質量殻条件が量子論においても成り立つことを保障する．式 (5) から Ψ は f と a に依存しないことがわかる．すなわち $\Psi = \Psi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}^{i}{}_{\alpha}, \pi_{i\dot{\alpha}})$．Lorentz 共変性と SU($N$) 共変性を考慮すると，式 (7) と式 (8) の解として，次のような平面波解が得られる：

$$\Psi^{i_1\cdots i_m}_{\alpha_1\cdots\alpha_m;j_1\cdots j_n,\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_n} = \prod_{k=0}^{m}\bar{\pi}^{i_k}_{\alpha_k}\prod_{l=0}^{n}\pi_{j_l\dot{\alpha}_l}\mathrm{e}^{\frac{-i}{\hbar}x^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^{i}_{\alpha}\pi_{i\dot{\alpha}}}. \tag{9}$$

同時に s の値は $s = \frac{\hbar}{2}(m-n)$ と定まる．このとき m, n は自然数のみが許され，従って s は $\hbar/2$ を基本単位として量子化される．

４．SU(N) 対称性

いま，SU(N) 対称性の物理的意味を考察する為に $(m,n) = (1,0)$ の場合における解 Ψ^{i}_{α} $\left(s = \frac{\hbar}{2}\right)$ と $(m,n) = (0,1)$ の場合における解 $\Psi_{i\dot{\alpha}}$ $\left(s = -\frac{\hbar}{2}\right)$ を考える．これらの解に対して式 (7) は次の連立方程式になる：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\dot{\alpha}}}\Psi^{i}{}_{\alpha} + \bar{\pi}^{i\alpha}\bar{\pi}^{k}_{\alpha}\Psi^{\dot{\alpha}}_{k} = 0,\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}\Psi^{\dot{\alpha}}_{i} + \pi^{\dot{\alpha}}_{i}\pi_{k\dot{\alpha}}\Psi^{k}_{\alpha} = 0\ . \tag{10}$$

以下では $N = 2$ の場合と $N \geq 3$ の場合において，式 (10) を考察する．

・$N = 2$ の場合

質量殻条件より得られる公式 $\bar{\pi}^{i\alpha}\bar{\pi}^{k}_{\alpha} = -\frac{m}{\sqrt{2}}\epsilon^{ik}$ を用いると式 (10) は次のようになる：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\dot{\alpha}}}\Psi^{i}_{\alpha} - \frac{m}{\sqrt{2}}\epsilon^{ik}\Psi^{\dot{\alpha}}_{k} = 0,\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}\epsilon^{ik}\Psi^{\dot{\alpha}}_{k} - \frac{m}{\sqrt{2}}\Psi^{i}_{\alpha} = 0\ . \tag{11}$$

上式は，添字 i $(i = 1,2)$ があることを除いて，Dirac 方程式の２成分表示そのものである．このとき $i = 1$ と選んだ式 (11) は粒子が従う Dirac 方程式であり，$i = 2$ と選んだ式 (11) は反粒子が従う Dirac 方程式であることがわかる．これらの事実を次の表にまとめる：

	粒子	反粒子
右手型（点あり）	$\Psi^{\dot{\alpha}}_{2}$	$\Psi^{\dot{\alpha}}_{1}$
左手型（点無し）	Ψ^{1}_{α}	Ψ^{2}_{α}

この表からわかるように，それぞれのカイラリティ（右手型，左手型）において，添字 i $(i = 1,2)$ によって粒子・反粒子が区別される．したがって作用がもつ SU(2) 対称性は粒子・反粒子間の内部対称性であることが結論づけられる．この結果は Penrose らの予想に対して否定的である．

・$N \geq 3$ の場合

質量殻条件を用いると，次式が証明される：

$$\bar{\pi}^{1\alpha}\bar{\pi}^{2}_{\alpha} = -\frac{m}{\sqrt{2}}\ , \tag{12}$$

$$\bar{\pi}^{1\alpha}\bar{\pi}^{i}_{\alpha} = \bar{\pi}^{2\alpha}\bar{\pi}^{i}_{\alpha} = 0\ \ (i = 1, \cdots, N). \tag{13}$$

式 (13) は全てのスピナー変数 $\bar{\pi}^{i}_{\alpha}$ が互いに比例することを示しており，これを式 (12) に適用すると $m = 0$ が得られる．したがって $N \geq 3$ の場合は SU(N) 対称性をもつ無質量系に帰着する．以上の結果，有質量系で許される内部対称性は SU(2) 対称性のみであることが結論づけられる．

６．まとめと今後の課題

本研究では，可換なスピナー変数と時空変数を用いてスピンをもつ有質量粒子の作用を与え，これを基に正準形式を構成し量子化を行った．導かれた連立方程式 (5)–(8) を解くことにより，整数または半整数スピン s をもつ有質量自由粒子の平面波解を得た．その結果を基に SU(N) 対称性の意味を考察した．$N = 2$ の場合には，Dirac 方程式を導出すると共に SU(2) 対称性は粒子・反粒子間の内部対称性であることを示した．一方で，$N \geq 3$ の場合は無質量系に帰着し，有質量粒子の理論には成り得ないことを示した．このように，Penrose らの予想に対して否定的な結果を得た．

今回は１階のスピナー波動関数のみを考察したが，より高階のものを考察することが当面の課題である．また，自由粒子の模型に外場（ゲージ場，重力場）との相互作用を取り入れることも課題として挙げられる．

参考文献

[1] S. Deguchi, S. Negishi, S. Okano, T. Suzuki, arXiv: 1309.4169.

[2] R. Penrose, Rep. Math. Phys. **12**, 65 (1977).

[3] 岡野諭,『日本物理学会講演概要集』, 68(2-1), 2013.

[4] S. Deguchi, T. Egami, J. Note, Prog. Theor. Phys. **124**, 969 (2010).