

非ガウスゆらぎを持つ決定論的不規則振動 -地磁気の反転モデルを例に

Non-Gaussian fluctuations in the model of geomagnetic reversals

谷内東¹, 島田一平²Azuma Yanai¹, Ippei Shimada²

Dissipative chaotic system and Brownian motion is known to have gaussian fluctuations. Recently, some non-Gaussian fluctuations have been reported in economic phenomena and spontaneous ignition in neurons^[1,3]. We found non-Gaussian fluctuations in the model of geomagnetic polarity by using the renormalization of its time series.

1. 研究の背景と目的

非決定論的で不規則な運動をするランダムウォークの時系列に対してくりこみを行うと, その時系列の分布はブラウン運動の分布であるガウス分布に収束する. また, 非線形散逸系カオスの時系列に対してくりこみを行うと分布はガウス分布に収束する事が知られている^[2,4]. しかし, 不規則運動の中には時系列に対してくりこみを行うとガウス分布ではない分布に収束する事例が経済活動や保存力学系写像のスタンダードマップ(標準写像)等^[1,2,3]で報告されている. 我々の研究目的は上記の様な非ガウスゆらぎを持つ力学系モデルを見つけ出し, 力学的解析をする事である. 非ガウスゆらぎを持つ保存力学系として地磁気の変動を記述するモデル, Long-range interacting Coupled-spin Model^[5](以下,LCSモデル)の解析を行った.

2. 地磁気の時間変動を記述する方程式 LCS モデル

LCS モデルは地球磁場の発生を解析するために作られた保存力学系モデルであり, 極性の反転やパワースペクトルの観測結果をよく再現するモデルであるとされている. 無次元化したハミルトニアは

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \cos^2 \theta_i - J \sum_{i < j} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (1)$$

で与えられている. N はスピン数で, p_i は i 番目のスピンの運動量, θ_i は i 番目のスピンの角度変数(mod 2π)であり, マクロスピンが上向きの状態を 0 [rad]とする. J は結合定数であり, スピン間相互作用の強さを表すパラメータである. ハミルトニアン^{の右辺 3 項目より}, 各スピンは全てのスピンと相互作用することから長距離相関構造を持ったモデルである事がわかる. また, 各マクロスピンが全体としてどれだけ磁化しているかの指標として

$$M = \frac{1}{N} \sum_i \cos \theta_i \quad (2)$$

なる量を導入する. M が 1 の時は全体としてスピンの上向き, M が -1 の時は全体としてスピンの下向きになる様な量である. このモデルは非線形であるが, 比較的容易に数値計算する事ができる. 図 1 は M の典型的な時系列の一部であり, 不規則な振動と地磁気変動で観測されている極性の反転をよく再現している. スピン数 $N=2$ で数値計算した結果, 結合定数 J やエネルギー E を変化させると $M(t)$ が周期解や不規則な解が出現することが確かめられた.

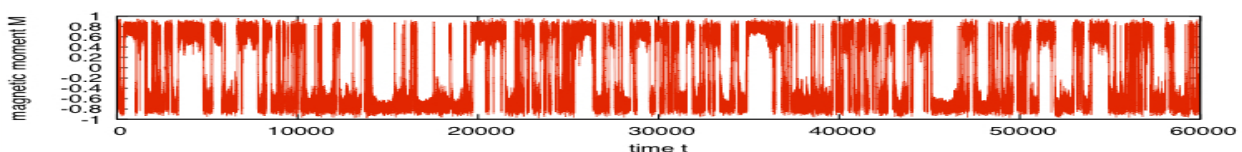


図 1 典型的な磁化 M の時系列

3. 時系列データに対するくりこみ

時系列データ $\{X_i\}_{i=1\dots N}$ に対して

$$Y_i \equiv \frac{1}{N^\beta} \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} X_j \tag{3}$$

なる粗視化とスケールリングされた時系列 $\{Y_i\}_{i=1\dots N/n}$ を再構成する。n は 1 ブロック当たりの時系列データ数である。これは時系列データ $\{X_i\}_{i=1\dots N}$ に対してブロックスピン変換をしている事に相当している。時系列データ $\{X_i\}_{i=1\dots N}$ がガウスゆらぎであるならば、 $\beta = 2.0$ でスケールリングした時、中心極限定理に従い、時系列 $\{Y_i\}_{i=1\dots N/n}$ の分布はくりこみ極限でガウス分布に収束するはずである。図 2 は $N=2$ の LCS モデルの P_1 についてスケールリング指数 $\beta = 2.0$ でくりこみを行い、その分布をプロットしたものである。 P_1 がガウスゆらぎであるならば分布は広がらずに収束するのだが、図 2 の計算結果を見る限りでは分布は広がり続け、収束しない。これは P_1 が非ガウスゆらぎである事を示唆している事に他ならない。なお、スケールリング指数がどの値で収束するかは講演当日に発表する。

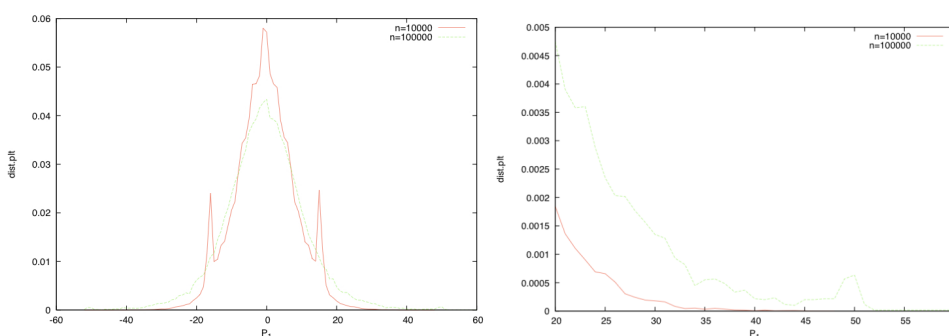


図 2 スケールリング指数 $\beta = 2.0$ でくりこみを行った時の P_1 の分布。凡例の n はくりこんだ時系列の数を表しており、右の図は左の図の分布のテールを拡大したものである。くりこみ回数を増やすと分布が広がっていく様子がわかる。

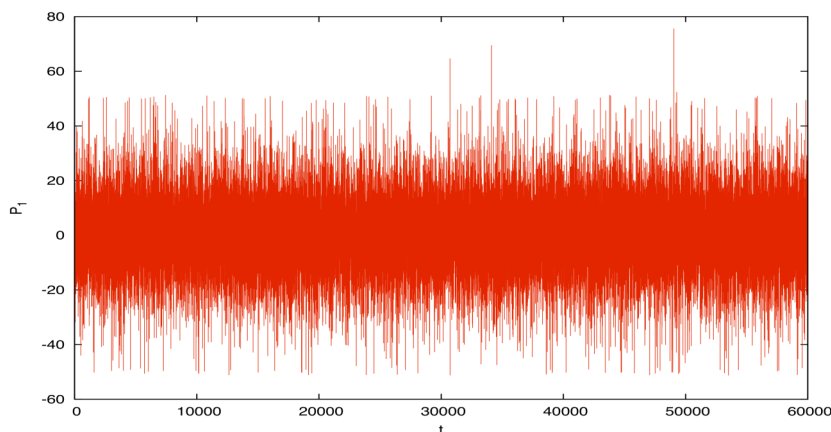


図 3 くりこまれた運動量 P_1 の時系列。

4. 参考文献

[1] 柳川一貴「短い時間での株価変動を起こす要因」日本大学大学院理工学研究科修士論文 1997 年 3 月
 [2] 今井邦彦「ハミルトン力学系におけるゆらぎの特性 —リアプノフ指数ゆらぎ」日本大学大学院理工学研究科修士論文 2004 年 3 月
 [3] 島田一平「マイクロ機械／知能エレクトロニクス集積化技術」2008 年度国際シンポジウム報告集
 [4] 結城慶一「カオスニューラルネットワークにおける連想記憶状態の解析 —脳の待機状態の理解を目指して—」日本大学大学院理工学研究科修士論文 2011 年 3 月
 [5] A. Nakamichi, H Mouri, D. Schmitt, A. Ferriz-Mas, J. Wicht, and M. Morikawa, Coupled spin models for magnetic variation of planets and stars, Mon. Not. R. Astron. Soc. 423, 2977-2990 (2012).