P-1

ファーストパッセージパーコレーションについて

久保田直樹[1]

Abstract: We consider the first passage percolation with i.i.d. weights on edges of a cubic lattice. Under the assumptions that a weight is equal to zero with probability smaller than the critical probability of bond percolation in a cubic lattice, and has the α-th moment for some $\alpha > 1$, we investigate rates of convergence in first passage time.

1　はじめに

樹木が正方格子状に並んだ果樹園において，ある木で病気が発症したとする．病気は隣接する 4 本の木にのみ伝染し，その確率は独立に p ずつであるとする．このとき，「ある木で発症した病気が，果樹園の樹木にどのように伝染していくか」を問題として扱うのが，パーコレーションである．これに関連して，Hammersley と Welsh [2] によって導入された "ファーストパッセージパーコレーション" がある．ファーストパッセージパーコレーションでは，一旦病気に感染した木 a から隣接する木 b には，ランダムな時間 $\omega(\{a,b\})$ で病気が伝染するとし，「ある範囲まで病気が広がる時間と，その感染経路」を問題として扱う．今回，このファーストパッセージパーコレーションに対し，時刻 t までに病気が伝染する範囲の形状の漸近挙動について研究を行った．

2　モデル

この章では，今回扱うファーストパッセージパーコレーションについて，より詳しく説明を行う．$\mathcal{E}$ を正方格子 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geqslant 2)$ の辺集合とし，$(\omega(e))_{e\in\mathcal{E}}$ を独立同分布な非負値確率変数列であるとする．($\mathbb{Z}^d$ の各頂点を果樹園の木，$\omega(e)$ を木から木へ病気が伝染するランダムな時間とみなせる．) このとき，$\mathbb{Z}^d$ の辺を「$e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_l$」と辿る経路 π において，その *passage time* を

$$T(\pi) := \sum_{i=1}^{l} \omega(e_1)$$

で定義する．さらに，$\mathbb{Z}^d$ の頂点 x から y への *first passage time* を以下で定義する:

$$T(x,y) := \inf\{T(\pi); \pi \text{ は } \mathbb{Z}^d \text{ の頂点 } x \text{ から } y \text{ への経路 }\}$$

ここで問題とするのは，原点 0 からの first passage time が，時間 t 以下となるような点の集まり

$$B(t) := \left\{ x + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d ; T(0,y) \leqslant t \right\}, \qquad t > 0$$

の漸近挙動である．

3　結果

この章では, 今回得られた結果について述べる．以下全体を通して，次の (A1) と (A2) が成立すると仮定する：$F(x)$ を $(\omega(e))_{e\in\mathcal{E}}$ の共通の分布関数とする．このとき，$\mathbb{Z}^d$ 上のボンドパーコレーションの臨界確率 p_c と，ある $\alpha > 1$ に対して

[1] 日大理工・PD

(A1) $F(0) < p_c$,
(A2) $\int_0^\infty x^\alpha \, dF(x) < \infty$.

仮定 (A2) がある $\alpha \geqslant d$ に対して成り立つならば，$\mathbb{R}^d$ のある部分集合 $B_0 \subset \mathbb{R}^d$ (より正確には，nonrandom でコンパクトな凸集合) が存在して，すべての $\epsilon > 0$ に対して， 確率 1 で次が成立することが知られている: 十分大きな $t > 0$ に対して，

$$(1-\epsilon)B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1+\epsilon)B_0.$$

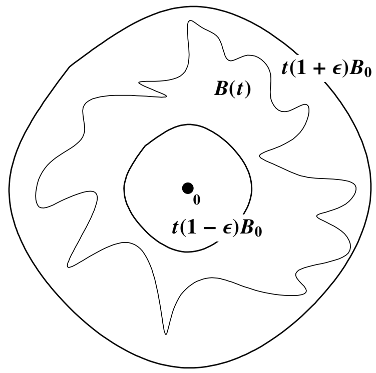

図 1　$B(t)$ の漸近挙動

(大まかには，右図 1 のような概形となる．より詳しくは，例えば，[3, Section 3, page 154] を参照されたい．) この結果に対し，Kesten [4] と Alexander [1] は，$B(t)/t$ が B_0 へ漸近していく rate をより精密に調べ，それは最大でも $\epsilon = O(t^{-1/2}\log t)$ 程度であることを示した．そこでは，上の仮定 (A2) よりかなり強い，以下の条件が仮定されている:

ある $\gamma > 0$ に対して，$\int_0^\infty e^{\gamma x} \, dF(x) < \infty$ が成立する．

そこで今回，この条件を弱めた場合の漸近挙動について考察し，以下の結果を得た．

Theorem 3.1. 仮定 (A1) が成立するとする．さらに，ある $\alpha \geqslant d$ に対して，仮定 (A2) が成立するとする．このとき，十分小さな $\delta > 0$ に対して，ある定数 $C_1, \ldots, C_4 > 0$ が存在し，次が成立する: 十分大きな $t > 0$ に対して，

- $u \geqslant C_1 t^{(d+1)\delta}$ に対して，

$$P\left(\frac{B(t)}{t} \subset \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right) B_0\right) \geqslant 1 - C_2 t^d \exp\{-C_3 t^\delta\}.$$

- $\beta := 2(3 - d\delta - 1/(6d+12))^{-1}$ に対して，

$$P\left(\left\{1 - C_4 t^{-1/(6d+12)} (\log t)^{1/3}\right\} B_0 \subset \frac{B(t)}{t}\right) \geqslant 1 - t^{\alpha\beta/2 - \alpha + d}.$$

特に，ある $\alpha > (d+1)(9d+17)/(6d+11)$ に対して仮定 (A2) が成立すれば，十分小さな $\delta > 0$ に対して，確率 1 で次が成立する: 十分大きな $t > 0$ に対して，

$$\left\{1 - C_4 t^{-1/(6d+2)} (\log t)^{1/3}\right\} B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset \left\{1 + C_1 t^{-1/2 + (d+1)\delta}\right\} B_0.$$

References

[1] K. S. Alexander. Approximation of subadditive functions and convergence rates in limiting-shape results. *The Annals of Probability*, 25(1):30–55, 1997.

[2] J. Hammersley and D. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*, pp. 61–110. Springer, 1965.

[3] H. Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, Vol. 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 125–264. Springer, Berlin, 1986.

[4] H. Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, pp. 296–338, 1993.