P-2

支配的サイクル予想について

On the Dominating Cycle Conjecture

長屋 篤実 [1]
Atsumi Nagaya

ここでいうグラフとは, 多重グラフで, 多重辺やループを許すとする（省略されている定義などは [1] や [5] を参照）. グラフ理論において最も有名な予想の 1 つに Cycle double cover 予想がある.

予想 1 (Cycle Double Cover 予想 Szekeres, Seymour) *すべての切断辺がないグラフ G はサイクルの集合 $\mathcal{F}$ で, G の全ての辺が $\mathcal{F}$ の丁度 2 つのサイクルに含まれるものをもつ.*

この予想は以下のように問題を一般化することができる.

定義 1 G をグラフとし, $\omega : E(G) \longmapsto \mathbb{Z}^+$ を $E(G)$ 上の重み関数とする. G のサイクルの集合 $\mathcal{F}$ で, G の各辺 e が丁度 $\mathcal{F}$ の $\omega(e)$ 個のサイクルに含まれるとき, $\mathcal{F}$ を **faithful cycle cover** と呼ぶ.

定義 2 H をオイラーグラフとし, H の点 v に接続する $E(v)$ を分割したものを v の **forbidden set** といい, $\mathcal{P}(v)$ と表わす. また, $\mathcal{P}(v)$ の各元を **forbidden part** と呼ぶ.

$$\mathcal{P} = \bigcup_{v \in V(H)} \mathcal{P}(v)$$

を H の **forbidden system** と呼ぶ.

H の辺素なサイクルの集合 $\mathcal{F}$ で, その合併が H になるものを H の **cycle decomposition** と呼ぶ. H が *cycle decomposition* $\mathcal{F}$ で, 全ての $C \in \mathcal{F}$ と全ての $P \in \mathcal{P}$ に対して, $|E(C) \cap P| \leq 1$ を充たすものを持つとき, $(H, \mathcal{P})$ は **compatible cycle decomposition (CCD)** を持つと言う.

forbidden system $\mathcal{P}$ が, 全ての *forbidden part* $P \in \mathcal{P}$ と H の全ての *edge-cut* T に対し, $|P \cap T| \leq \frac{|T|}{2}$ を充たすとき, **admissible** であるという.

$\mathcal{P}$ が admissible であることは明らかに $(H, \mathcal{P})$ が CCD を持つための必要条件であるが, 十分ではない. 以下の左図は, faithful cycle cover を持たない有名な例で, この例から幾つかの変換によって, admissible であるが CCD を持たないものを右図のように構成できる.

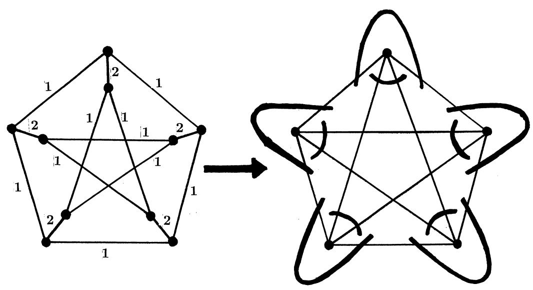

図 1:

しかし, 以下のように平面的オイラーグラフには任意の *admissible forbidden system* に対して CCD が存在することが知られている.

定理 1 (Fleischner and Frank) *H をオイラーグラフで $\mathcal{P}$ を H 上の admissible forbidden system とする. H が平面的ならば $(H, \mathcal{P})$ は CCD を持つ.*

[1] 日大理工・院 (前)・数学

この主張は以下のようにさらに一般化されている．

定理 2 (Fan and Zhang) *H をオイラーグラフで admissible forbidden system を $\mathcal{P}$ とする．H が K_5 を minor として含まなければ $(H, \mathcal{P})$ は CCD を持つ．*

次に, forbidden system を制限した CCD 問題を考える．

定義 3 H をオイラーグラフとし, $T = e_0 \cdots e_{m-1}$ を G の *Euler tour* とする．H の *cycle decomposition* $\mathcal{C}$ が,

$$\text{任意の } i \in \mathbb{Z}_m \text{ と } C \in \mathcal{C} \text{ に対して, } |\{e_i, e_{i+1}\}| \cap E(C) \leq 1$$

を充たすとき, T と C はお互いに **compatible** であるという．

すなわち, 各頂点 u に対して, Euler tour T が, $e_{i_1}e_{i_1+1}$, $e_{i_2}e_{i_2+1}, \ldots, e_{i_s}e_{i_s+1}$ と s 回 u を通過したとき, $E(u)$ の forbidden set を $\{e_{i_1}, e_{i_1+1}\}, \{e_{i_2}, e_{i_2+1}\}, \ldots, \{e_{i_s}, e_{i_s+1}\}$ と定義して得られる H の forbidden system $\mathcal{P}$ に対する compatible cycle decomposition $\mathcal{C}$ が, T と compatible になる．

予想 2 (Sabidussi) *H を最小次数 $\delta(H) \geq 4$ のオイラーグラフ, T は H の Euler tour とする．このとき H は T に対して compatible な cycle decomposition を持つ．*

この予想は, 次の予想と同値であることが Fleischner によって示されている．**dominating cycle（支配的サイクル）**とは, G の全ての辺がサイクル上の頂点に接続しているサイクルである．

予想 3 (Sabidussi and Fleischner) *G は dominating cycle C を持つ cubic graph とする．このとき G は, C を要素として含む circuit double cover $\mathcal{F}$ を持つ．*

以下の予想は, グラフ理論の幾つかの重要な問題と関係する予想である．

予想 4 (支配的サイクル予想 Fleischner, Ash and Jackson) *すべての cyclically 4 edge-connected cubic graph は dominating cycle を含む．*

特に, Fleischner は予想 3 と 4 が正しければ cycle double cover 予想が正しいことを示している．Nash-Williams は, 全ての 4 正則 4 連結グラフはハミルトンサイクルを持つと予想した（[4]）．この予想が正しければ, 支配的サイクル予想が正しいことを示すことが出来るが, Meredith によって Nash-Williams 予想の反例が構成された（[3]）．

一方, 今年の 3 月にチェコの Domazlice で開催されたワークショップで, Hoffmann-Ostenhof が Nash-Williams 予想を forbidden system を利用して修正した予想を示し, その予想と支配的サイクル予想が同値であることを発表した ([2])．

参考文献

[1] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, **244**, Springer, New York, 2008.

[2] A. Hoffmann-Ostenhof, *Nash-Williams conjecture and the dominating cycle conjecture*, preprint

[3] G.H.J. Meredith, *Regular n-valent n-connected nonHamiltonian non-n-edge-colorable graphs.* J. Combinatorial Theory Ser. B **14** (1973), 55-60.

[4] C. St. J.A. Nash-Williams, *Possible directions in graph theory,* 1971 Combinatorial Mathematics and its Applications (Proc. Conf., Oxford, 1969) pp. 191-200 Academic Press, London

[5] C.Q. Zhang, *Circuit double cover of graphs*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **399**, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.