P-3

ランダム媒質中の多次元拡散過程の漸近挙動について
Brox-type diffusion の多次元への拡張
Asymptotic behaviors of multi-dimensional diffusion processes in random environments
Multi-dimensional Brox-type diffusion processes

○高橋　弘[1]
*Hiroshi TAKAHASHI[1]

Abstract: It is well-known that a multi-dimensional standard Brownian motion, which is formed by d independent one-dimensional standard Brownian motions, is recurrent if $d = 1$ or 2, and transient otherwise. We consider such problems for the cases of d-dimensional Brox-type diffusion processes in stable or semi-stable Lévy environments.

1．序論

多次元 Brown 運動の漸近挙動について，１次元・２次元の場合は再帰性（原点の近傍に無限回戻ってくる性質）を持ち，３次元以上の場合は非再帰的である，という事実はよく知られている．多次元 Brown 運動は互いに独立な１次元 Brown 運動を各成分に与えることで構成されるが，本講演では，Brown 運動の代わりに Brox-type diffusion process を各成分に与えた場合の漸近挙動を考察する．

$\mathcal{W}$ を $\mathbf{R}$ に値をとり，時間に対し右連続左極限を持ち，時刻 0 で 0 に値をとるような関数 W の集合とする．また，Q を $\mathcal{W}$ 上の確率測度として，(W, Q) を媒質と呼ぶ．そして，$(\mathbf{W}, \mathbf{Q}) = \{(W_k, Q_k), k = 1, 2, \ldots, d\}$ として，多次元の媒質を表す．$\mathbf{W}$ を固定したときに，次の生成作用素に対応する拡散過程 $X_{\mathbf{W}}$ を考える：

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{1}{2} \exp\{W_k(x_k)\} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \exp\{-W_k(x_k)\} \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} \tag{1}$$

この多次元拡散過程の各成分は，次の形式的な確率微分方程式に対応する：

$$dX^k_{W_k}(t) = dB^k(t) - \frac{1}{2} W'_k(X^k_{W_k}(t))dt, \quad X^k_{W_k}(0) = 0,$$

ここで $\{B^k(t)\}$ は W_k とは独立な 1 次元 Brown 運動である．

$\Omega = \{\omega \in \mathbf{C}([0, \infty) \to \mathbf{R}) : \omega(0) = 0\}$ として，P を $\{Q_k,\ k = 1, 2, \ldots, d\}$ と独立な Ω 上の Wiener 測度とする．このとき $X_{\mathbf{W}}(t)$ は，(Ω, P) 上の 1 次元 Brown 運動に対して，(W_k, Q_k) による適切なスケーリングを空間と時間についてとったものを，独立に d 個並べることで実現される．Brox は媒質が 1 次元 Brown 運動の場合を考察し，$(\log t)^{-2} X_W(t)$ のスケーリングの下で，極限分布が存在することを示した [1]．Brox-type diffusion process は，均質化の問題に比べて，拡散の仕方が非常に遅い（劣拡散性と呼ばれる）ことが，その特徴の一つである．

Brox-type diffusion process は，Solomon[2]･Sinai[3] によって考察された，以下のランダム媒質中のランダムウォークを連続時間で考えたものである．$\alpha = \{\alpha_i, i \in \mathbb{Z}\}$ を独立で同分布に従う，$(0, 1)$ に値をとる確率変数列とする．α を固定したとき，次の推移確率を持つ，０からスタートする 1 次元ランダムウォークを考える：

$$P_\alpha\{X_{n+1} = i + 1 | X_n = i\} = \alpha_i,$$
$$P_\alpha\{X_{n+1} = i - 1 | X_n = i\} = 1 - \alpha_i.$$

Solomon は [2] において，再帰性・非再帰性の問題を扱った．$\gamma_i = (1 - \alpha_i)/\alpha_i$ としたとき，得られた結果は

(*i*) $E[\log \gamma_i] < 0$ のときは，$\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ a.s.

(*ii*) $E[\log \gamma_i] > 0$ のときは，$\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ a.s.

(*iii*) $E[\log \gamma_i] = 0$ のときは，ほとんどすべての媒質について，X_n は無限回原点に戻ってくる．

であった．また Sinai は [3] において，$E[\log \gamma_i] = 0$ かつ $E\left[\{\log \gamma_i\}^2\right] < \infty$ であるときに，$(\log n)^{-2} X_n$ の分布がランダム媒質 α の汎関数に収束することを示した．

以後，(1) に対応する多次元拡散過程 $X_{\mathbf{W}}$ の漸近挙動について考察する．ここでは，任意の開集合 $U \subset \mathbf{R}^d$ について

$$P(X_{\mathbf{W}}(t) \in U \text{ for some } t > 0) = 1$$

が成立するときに，$X_{\mathbf{W}}$ は再帰的であるといい，それ以外の場合を非再帰的と呼ぶ．

[1]日大理工・教員・一般

2. 主定理

本研究では，(1) に対応する多次元拡散過程 $X_{\mathbf{W}}$ について，以下の結果を得た：

定理 1. $(\mathbf{W},\mathbf{Q})$ が d 個の独立な *Brownian* 媒質であるとき，対応する多次元拡散過程は，ほとんどすべての媒質について再帰的である．

この定理の証明は，拡散過程に対する Ichihara's test [4] を用いて示される．また媒質については，Brown 運動を含む自己相似確率過程である，α-安定 Lévy 過程にまで拡張できる．ここで，$\{X(t)\}$ が α-安定 Lévy 過程であるとは，(i) 独立増分性を持ち (ii) 定常増分性を持ち (iii) 確率連続性を持ち (iv) 確率 1 で $X(0)=0$ である (v) 自己相似性

$$\{W(x)\} \overset{d}{=} \{a^{-1/\alpha}W(ax)\} \text{ for any } a>0$$

を持つ確率過程のことを指す．α は自己相似性の指数であり，$\alpha\in(0,2]$ であることが知られている．α-安定 Lévy 過程を媒質とした 1 次元拡散過程は，田中 [5] によって $(\log t)^{-\alpha}X_W(t)$ のスケーリングの下で，極限分布が存在することが示されている．定理 1 は，自己相似性の指数が要素によって異なる媒質についてまで拡張することができる：

定理 2. (W_i,Q_i) を，x が負の場合は α_i-安定 *Lévy* 過程で，正の場合は β_i-安定 *Lévy* 過程であり，互いに独立な媒質とする．このような媒質を独立に d 個並べたランダム媒質中の多次元拡散過程は，ほとんどすべての媒質について再帰的である．

3. 注意

田中 [5] では，非負・非正反射壁 Brown 運動を媒質とした場合について，その極限分布の表現を与えている．また，どちらの媒質についても 1 次元拡散過程は，ほとんどすべての媒質について再帰的であり，$(\log t)^{-2}X_W(t)$ のスケーリングの下で極限分布が存在する．このような反射壁 Brown 運動を媒質にした多次元拡散過程については，次の結果を得ている [6]：

定理 3. (*i*) $(\mathbf{W},\mathbf{Q})$ が，独立な d 個の非負反射壁 *Brownian* 媒質であるとき，対応する多次元拡散過程は，ほとんどすべての媒質について再帰的である．

(*ii*) $(\mathbf{W},\mathbf{Q})$ が，独立な d 個の非正反射壁 *Brownian* 媒質であるとき，対応する多次元拡散過程は，ほとんどすべての媒質について，２次元以上で非再帰的である．

(*i*) については，Ichihara's test を用いて定理 1 と同様に示される．(*ii*) については，非再帰性に関する Ichihara's test を用いて示される．具体的には，ほとんどすべての媒質について，次の積分が有限であることを示せばよい：

$$\int_1^\infty r^{1-d}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{d}|W(r\sigma_j)|\right\}dr,$$

ここで $\sigma=\{\sigma_j, j=1,\ldots,d\}\in\tilde{S}$ で，$\tilde{S}$ は単位球面 S^{d-1} の部分集合で $|\tilde{S}|>0$ を満たすものである．

4. 参考文献

[1] T. Brox, "A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium", Ann. Probab. 14, pp.1206–1218, 1986.

[2] F. Solomon, "Random walks in a random environment", Ann. Probability 3, pp.1–31, 1975.

[3] Y. Sinai, "The limit behavior of a one-dimensional random walk in a random environment", Theory Probab. Appl. 27, pp.256–268, 1982.

[4] K. Ichihara, "Some global properties of symmetric diffusion processes", Publ. RIMS, Kyoto Univ., 14, pp.441–486, 1978.

[5] H. Tanaka, "Limit distributions for one-dimensional diffusion process in self-similar random environments", In: Papanicolau, G. (Ed.), Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems, IMA Vol. Math. Appl. 9. Springer, New York, pp.189-210, 1987.

[6] H. Takahashi, "Recurrence and transience of multi-dimensional diffusion processes in reflecting Brownian environments", Statist. Proba. Lett. 69, pp.171–174, 2004.