P-5

熱伝導方程式のコーシー問題

超関数の応用

○石井 洋志[1]　利根川 聡[2]

定義 1 $C_0^\infty(\Omega)$ にある種の収束概念を導入したものを $D(\Omega)$ と書き,$D(\Omega)$ 上の連続な線形汎関数を Ω 上の超関数といい,Ω 上の超関数全体の空間を $D'(\Omega)$ と書く.

$\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ とおき, 次のような時間発展する偏微分方程式を考える.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial E}{\partial t} = LE \quad \text{in} \quad D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+), \\ \displaystyle\lim_{t\to+0} E(x,t) = \delta(x) \ \text{in} \ D'(\mathbb{R}^n). \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu \quad \text{in} \quad D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+), \\ \displaystyle\lim_{t\to+0} u(x,t) = u_0(x) \ \text{in} \ D'(\mathbb{R}^n). \end{array}\right\} (2)$$

問題 (2) のように, ある初期時刻（今の場合は $t=0$）に初期値を与えて微分方程式を解く問題を, コーシー問題（または初期値問題）と呼ぶ. (1) の解 E を, コーシー問題 (2) の基本解という. もし基本解 E が存在するならば,

$$u \;=\; E(t) * u_0 \ (*\text{は } x \text{ 変数についての合成積})$$

とおき, 右辺が各 $t>0$ に対して $D'(\mathbb{R}^n)$ として意味をもてば, u はコーシー問題 (2) の解となる.

例 (熱伝導方程式)

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \triangle E = \ 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \quad (3)$$
$$E(0,x) = \delta(x).$$

x 変数についてフーリエ変換すると, $\dfrac{\partial \widehat{E}}{\partial t} + |\xi|^2 \widehat{E} = 0, \quad \widehat{E}(\xi,0) = \dfrac{1}{(2\pi)^n}$. ここで, ξ をパラメータとみて固定すれば, 常微分方程式の初期値問題になるので, 解は求積法により次のように求めることが出来る:

$$\widehat{E}(\xi,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-t|\xi|^2} \in S'(\mathbb{R}^n), \quad t>0$$

$S'(\mathbb{R}^n)$ は, シュワルツ空間 $S(\mathbb{R}^n)$ 上の連続な線形汎関数全体からなる空間である. この $\widehat{E}$ のフーリエ逆変換を求める:

$$\begin{aligned} E \;&=\; F^{-1}[\widehat{E}] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{r^n} e^{ix\cdot\xi} e^{-t|\xi|^2} d\xi \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\xi_j - \frac{i}{2t}x_j)^2} d\xi_j \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz_j^2} d\xi_j = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

ここで, $z_j = \xi_j - \dfrac{i}{2t}x_j$ と変数変換した. また, よく知られた $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz_j^2} dz_j = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ を使った.

熱伝導方程式のコーシー問題を解くために, 記号と関数空間を新たに導入する.

[1]日大理工・院 (前)・数学
[2]日大理工・教員・数学

定義 2 X をバナッハ空間, T を正定数とし, f を $[0,T]$ 上で定義された X 値関数とするとき, $t \in (0,T)$ に対して,

$$\exists v \in X; \left\| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} - v \right\|_X \to 0 \quad (h \to 0)$$

であるならば, f は t で微分可能であるという. 各 $t \in (0,T)$ に対して, 上のような極限 v を対応させる $[0,T]$ 上の X 値関数 $v(t)$ を $df(t)/dt$ と書き, f の導関数という. 導関数 $df(t)/dt$ が t 変数に関して連続である時, f は連続微分可能であるという.

自然数または 0 である m に対して, 次のように関数空間をおく:

$$C^m([0,T];X) = \{f : [0,T] \to X;\ X \text{ 値関数として } [0,T] \text{ 上 } m \text{ 回連続微分可能 }\}$$

簡単のため, $C^0([0,T];X)$ を $C([0,T];X)$ と書くことにする.

定義 3 $s \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $\mathbb{R}^n$ 上のソボレフ空間 $H^s(\mathbb{R}^n)$ を次のように定める:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{v \in S'(\mathbb{R}^n); (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{v}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

熱伝導方程式のコーシー問題に対する, 解の存在と一意性定理を述べる.

定理 1 $s \in \mathbb{R},\ u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $u = E * u_0$ とおくと, u は初期条件 $u(0) = u_0$ を満たす (3) の次のクラス

$$C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$$

に属する解であり, (3) のコーシー問題の解はこのクラスで一意である.

次に, 外から熱が与えられた場合の熱伝導方程式に対する, コーシー問題を考えることにする:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = f \ \text{in}\ D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{array}\right\} (4)$$

定理 2 $s \in \mathbb{R}$ に対して, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad f(t) \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^n))$ とする. このとき,

$$u = E(t) * u_0 + \int_0^t E(t-\tau) * f(\tau) d\tau$$

とおくと, u は (4) の

$$C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2}(\mathbb{R}^n))$$

に属する解であり, (4) の解はこのクラスで一意である.

参考文献

[1] 堤誉志雄 , 偏微分方程式論, 培風館, 2004.

[2] B・C・ウラジミロフ , 応用偏微分方程式 1， 2 , 総合出版, 1977.