P-9

土倉･堀口･村瀬･Halley 法 (拡張 Halley 法) とその収束Ⅰ(等式の場合)

Tsuchikura･Horiguchi･Murase･Halley's Method (Expansion of the Halley's Method) and the Convergences Ⅰ(in the case of equations)

堀口　俊二*
Shunji Horiguchi

Abstract : 1673 年村瀬義益（佐渡→江戸→下総（現在の千葉県））は『算法勿憚改』を著した．この書で村瀬は，3 次方程式から2 種類の2 乗の漸化式 x_n^2 と3 次方程式の変形を導いた．この変形式の文章は2009 年 5 月に藤井康生が解読に成功した[3]．村瀬は変形式でホーナー法も研究している．鈴木武雄[6]は「村瀬は和算史上だけでなく，世界数学史上でも稀有な存在である」と評価している．日本にはこのような独創性のある和算家がいるのである．変形式の解読により研究が進展した．2009 年に3つの式より，我々は村瀬の2 乗の漸化式が，ニュートン・ラフソン法(1690)の拡張に繋がることを発見し，q 乗の土倉・堀口法を与えた[2]．さらに本稿では§2においてHalley 法の拡張のq 乗の拡張 Halley 法を与える．§3は拡張 Halley 法の収束を考察する．我々は§1の関数の定義から出発する．

1．関数 $y=f(x)$ の $x=t^{1/q}$ による関数 $y=g(t)$ の定義

定義 1.1　実変数 xの関数 $y=f(x)$ を，$x=t^{1/q}$ ($q(\neq 0)$は実数)により変数変換した関数を $y=g(t)$ とする．すなわち

$$g(t) := f(t^{1/q}) = f(x)$$

この関数は $g(x^q)=f(x)$ となるから, $y=f(x)$ を高さは変えないでx 軸方向に $x^q=t$ だけ伸縮したグラフとなる．

定理 1.2　曲線 $y=g(t)$ は

$$g''(t)=\frac{x\,f''(x)+(1-q)\,f'(x)}{q^2x^{2q-1}}>0\,(<0)$$

となる区間なら，グラフは下に凸(上に凸)となる．

定理 1.3　$y=f(x)$ の点 xにおける曲率

$$\mu(x)=\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$$

は，$y=g(t)$ の曲率

$$\mu_q(x)=\frac{g''(t)}{(1+g'(t)^2)^{3/2}}=\frac{xf''(x)+(1-q)f'(x)}{q^2x^{2q-1}\left(1+\left(\dfrac{f'(x)}{qx^{q-1}}\right)^2\right)^{3/2}}$$

に移る．特に $\mu_1(x)=\mu(x)$ となる．

2．Halley 法と土倉･堀口･村瀬･Halley 法(*THMH* 法)

定義 2.1　実変数 xの方程式 $f(x)=0$ の解(根) α を近似する次の漸化式を**Halley's method**という．

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Halley 法を拡張する．定義 1.1の $y=g(t)$ にHalley 法を行い，それを $f(x_n)$ で表すと次のq 乗の漸化式を得る．

定理 2.2

$$x_{n+1}^q=x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)\left(\dfrac{1}{qx_n^{q-1}}f''(x_n)+(1-q)\dfrac{1}{x_n}f'(x_n)\right)}{f'(x_n)}}$$

定義 2.3　定理 2.2の漸化式を**土倉･堀口･村瀬･Halley 法**（***THMH*** **法**）あるいは**拡張 Halley 法**という．特に$q=1$のときHalley 法になる．(土倉は東北大学名誉教授土倉保)

THMH 法の計算は次式で行う．

$$x_{n+1}=\left[x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)\left(\dfrac{1}{qx_n^{q-1}}f''(x_n)+(1-q)\dfrac{1}{x_n}f'(x_n)\right)}{f'(x_n)}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

3．土倉･堀口･村瀬･Halley 法(*THMH* 法)の収束

$(x^q-\alpha^q)/(x^r-\alpha^r)$ にロピタルの定理を適用して次の数列の収束の定理を得る．

定理 3.1　数列$\{x_n\}$ において $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ とする．q, r を0でない実数定数とする．このとき αに十分近い x_n に対して次の近似式が成立つ．

$$x_n^q-\alpha^q \fallingdotseq \frac{q}{r}\alpha^{q-r}(x_n^r-\alpha^r)$$

＊　新潟産業大学

定理 3.2　Halley 法は，αが $f(x)=0$ の単根で，x_n がαの近傍のとき，次の3 次収束の近似をする．

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \frac{\frac{1}{4}f''(\alpha)^2-\frac{1}{6}f'(\alpha)f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}(x_n-\alpha)^3$$

αが$m(\geqq 2)$重根のとき，次の1 次収束の近似をする．

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \left(1-\frac{2}{m+1}\right)(x_n-\alpha)$$

定理 3.1，3.2より，$q(\neq 0)$が実数定数のとき，次の定理を証明できる．これより数値計算の考察範囲が広がる．

定理 3.3　*THMH* 法は，αが $f(x)=0$ の単根で，x_n がαの近傍のとき，実数定数$q\ (\neq 0)$に対して次の3次収束の近似をする．

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \frac{\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}f''(\alpha)^2-\frac{1}{6}f'(\alpha)\left(f'''(\alpha)+(2q-1)(q-1)f'(\alpha)\right)\\ +\frac{(q-1)^2}{4\alpha^2}f'(\alpha)^2-\frac{(q-1)f'(\alpha)f''(\alpha)}{\alpha}\end{array}\right)}{f'(\alpha)^2}(x_n-\alpha)^3$$

αが$m(\geqq 2)$重根で，x_n がαの近傍のとき

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \left(1-\frac{2}{m+1}\right)(x_n-\alpha)$$

となり，1 次収束の近似をする．

命題 3.4　*THMH* 法において，αが $f(x)=0$ の単根で，x_n がαの近傍のとき，実数 qが十分に1に近ければ，*THMH* 法とHalley 法の収束の速さは等しい．

THMH 法の3 次収束の$(x_n-\alpha)^3$ の係数
＝Halley 法の3 次収束の$(x_n-\alpha)^3$ の係数

に3 通りの式変形を行い，以下の定理 3.5～3.7を得る．

定理 3.5　αを $f(x)=0$ の単根とする．x_n がαの近傍のとき，

$$q=\frac{1}{(4\alpha^2-3)}\left((2\alpha^2-3)-\frac{12\alpha f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)$$

より得られる実数qに対して，q 乗の*THMH* 法とHalley 法の収束の速さは等しい．

定理 3.6　αを $f(x)=0$ の単根とする．曲線 $y=g(t)$ の凹凸を判別する2 次導関数 $g''(t)$ が，ある実数 qに対して

$$\frac{(1-q)f'(\alpha)+\alpha f''(\alpha)}{q^2\alpha^{2q-1}}$$
$$=\frac{1}{(q\alpha^{q-1})^2}\left(-\left(\frac{3}{4\alpha}+\frac{\alpha}{3}\right)q+\frac{3}{4\alpha}+\frac{\alpha}{6}\right)f'(\alpha)$$

を満たすとする．このときq 乗の*THMH* 法とHalley 法の収束の速さは等しい．

定理 3.7　αを $f(x)=0$ の単根とする．曲線 $y=g(t)$ の曲率 $\mu_q(x)$ が，ある実数 qに対して

$$\mu_q(\alpha)=\frac{1}{\left(1+\left(\frac{f'(\alpha)}{q\alpha^{q-1}}\right)^2\right)^{3/2}(q\alpha^{q-1})^2}\left(-\left(\frac{3}{4\alpha}+\frac{\alpha}{3}\right)q+\frac{3}{4\alpha}+\frac{\alpha}{6}\right)f'(\alpha)$$

を満たすとする．このときq 乗の*THMH* 法とHalley 法の収束は等しい．

方程式 $f(x)=0$ を $h(x)=0$ に式変形する．この$h(x)$の r 乗の*THMH* 法は次式である．

$$x_{n+1}^r=x_n^r-\frac{rx_n^{r-1}h(x_n)}{h'(x_n)-\frac{1}{2}\frac{h(x_n)\left(\frac{1}{rx_n^{r-1}}h''(x_n)+(1-r)\frac{1}{x_n}h'(x_n)\right)}{h'(x_n)}}$$

命題 3.8　$f(\alpha)=0,\ h(\alpha)=0$ とし，αは単根とする．

$f(x)$のq 乗の*THMH* 法の3 次収束の$(x_n-\alpha)^3$ の係数
＝$h(x)$のr 乗の*THMH* 法の3 次収束の$(x_n-\alpha)^3$ の係数

のとき，$f(x)$のq 乗の*THMH* 法と$h(x)$のr 乗の*THMH* 法の収束の速さは等しい．

参考文献

[1] 村瀬義益著・西田知己校注：『算法勿憚改』(1673)，研成社，1993
[2] 堀口俊二：村瀬義益とニュートンの漸化式より得られる一般漸化式，数理解析研究所講究録 1739, 2011, pp. 234-244.，京都大学数理解析研究所
[3] 堀口俊二・金子勉・藤井康生：村瀬義益の濾縁の3次方程式の3つの解法とホーナー法の関連，和算研究所紀要 2013.3 No. 13, pp. 3-8.，和算研究所
[4] 土倉保：和算家的発想によるp 乗根の求め方，和算研究所紀要 2012.3 No. 12, pp. 1-7.，和算研究所
[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_method
[6] 鈴木武雄：『和算の成立』，恒星社厚生閣，2007
[7] 永坂秀子：『計算機と数値解析』，朝倉書店，1980
[8] 戸川隼人：『数値計算法』，コロナ社，1981