O-12

電磁場中のスピンをもつ無質量粒子のツイスター模型
A twistor model of a massless spinning particle undergoing electoromagnetic field

○木本翔大[1]，岡野諭[2]，出口真一[3]
*Shohdai Kimoto[1], Satoshi Okano[2], Shinichi Deguchi[3],

Abstract : We study a twistor model of a massless spinning particle undergoing electoromagnetic field.

1．導入

これまでにスピンをもつ粒子を記述する種々の古典力学的な模型が提案されてきた．例えば，反可換数を用いた模型として spinning particle 模型や super particle 模型が知られている．また，可換変数を用いた模型として，ツイスター変数で記述されたスピンを持つ無質量粒子の模型が白藤により与えられている [1]．この模型にゲージ理論の要素を加味（ゲージ化）して，さらにツイスター変数を時空変数とスピナー変数で表現した模型も考察されている [2]．

本研究では，この模型を拡張して，電磁場と結合したスピンをもつ無質量粒子を記述する模型を構成する．

2．ツイスターとスピンをもつ無質量粒子

ツイスター空間の要素であるツイスターは，Weyl スピノル ω^α $(\alpha = 0,1)$ と $\pi_{\dot\alpha}$ $(\dot\alpha = \dot 0, \dot 1)$ の組として，$Z^A := (\omega^\alpha, \pi_{\dot\alpha})$ $(A = 0,1,2,3)$ と定義される．また，双対ツイスターは，$\bar Z_A = \left(\bar\pi_\alpha, \bar\omega^{\dot\alpha}\right)$ と表される．ここで，ω^α は

$$\omega^\alpha = iz^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} = ix^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} + y^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} = ix^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} + \psi^\alpha \tag{1}$$

と書け，粒子の時空変数 $x^{\alpha\dot\alpha}$ とスピンの自由度 $y^{\alpha\dot\alpha}$ を含んでいる．但し，$x^{\alpha\dot\alpha}$ と $y^{\alpha\dot\alpha}$ は Hermite 性をもち，ψ^α は $\psi^\alpha := y^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}$ と定義される．

いま，Levi-Civita テンソル $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$，4 元角運動量 $M^{\mu\nu}$，4 元運動量 p_μ から Pauli-Lubanski スピンベクトル

$$S_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}p^\sigma \tag{2}$$

を定義する．無質量粒子の場合，S_μ は $S_\mu = hp_\mu$ と書ける．但し，h はヘリシティと呼ばれる比例定数である．これをスピナー表現で表すと，

$$S_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta}M^{\beta\gamma\dot\beta\dot\gamma}p^{\delta\dot\delta} = \frac{1}{2}\bar Z_A Z^A p_{\alpha\dot\alpha} \tag{3}$$

となり，ヘリシティh はツイスター変数の内積 $\bar Z_A Z^A$ を $\frac{1}{2}$ 倍したものとして簡単に表現できる．

無質量自由粒子を記述するゲージ化された白藤作用はツイスター変数 $Z^A = Z^A(\tau)$ を用いると

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[i\bar Z_A \dot Z^A + a\left(\bar Z_A Z^A - 2s\right)\right] \tag{4}$$

と与えられる．ここで，τ は世界線のパラメータであり，$a(\tau)$ はパラメータ空間上の U(1) ゲージ場，s は実定数，ドットは τ に関する微分である．作用 S は局所 U(1) 変換 $Z^A \to e^{i\theta(\tau)}Z^A$，$\bar Z_A \to e^{-i\theta(\tau)}\bar Z_A$，$a(\tau) \to a(\tau) + \dot\theta$ のもとで不変であり，さらにパラメータの付け替え $\tau \to \tau'(\tau)$ のもとでも不変である．但し，位相変換のパラメータ $\theta(\tau)$ に対して境界条件 $\theta(\tau_1) = \theta(\tau_2)$ を要求した．

作用 S の a に関する変分から粒子のヘリシティを定める拘束条件，$\frac{1}{2}\bar Z_A Z^A - s = 0$ が得られる．この式から作用 S はヘリシティs をもつ無質量粒子を記述することが分かる．ツイスター変数を量子化した後，上の式を物理的状態 $|\Phi\rangle$ を定める式 $\left[\frac{1}{4}(\hat{\bar Z}_A \hat Z^A + \hat Z^A \hat{\bar Z}_A) - s\right]|\Phi\rangle = 0$ と読み替えるとヘリシティs は量子化されて整数と半整数に制限される．

次に，ゲージ化された白藤作用に含まれるラグランジアンを時空変数とスピナー変数で書き換えると

$$\begin{aligned} L = &-\dot x^{\alpha\dot\alpha}\bar\pi_\alpha\pi_{\dot\alpha} - i\left(\psi^\alpha\dot{\bar\pi}_\alpha - \bar\psi^{\dot\alpha}\dot\pi_{\dot\alpha}\right) \\ &+ a\left(\psi^\alpha\bar\pi_\alpha + \bar\psi^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} - 2s\right) \end{aligned} \tag{5}$$

となる．以下では，このラグランジアンを基にして Hamilton 形式を論じる．

3．拘束系の正準形式と正準量子化

式 (5) に含まれる正準座標 $\left(x^{\alpha\dot\alpha}, \bar\pi_\alpha, \pi_{\dot\alpha}, \psi^\alpha, \bar\psi^{\dot\alpha}, a\right)$ に対する正準運動量を $(P^{(x)}_{\alpha\dot\alpha}, P^\alpha_{(\bar\pi)}, P^{\dot\alpha}_{(\pi)}, P^{(\psi)}_\alpha, P^{(\bar\psi)}_{\dot\alpha}, P^{(a)})$ と表す．まず，式 (5) より得られる全ての拘束条件を第 1 類と第 2 類に分類する．第 2 類拘束条件は Dirac 括弧を定義する際に用いられ，結果として正準変数に対する Dirac 括弧は次のように得られる：

$$\begin{aligned} &\left\{x^{\alpha\dot\alpha},\ P^{(x)}_{\beta\dot\beta}\right\}_{\mathrm{D}} = \delta^\alpha_\beta\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\ , \qquad \left\{\bar\pi,\ \psi^\beta\right\}_{\mathrm{D}} = i\delta^\beta_\alpha\ , \\ &\left\{\pi_{\dot\alpha},\ \bar\psi^{\dot\beta}\right\}_{\mathrm{D}} = -\,i\,\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\ , \quad \left\{a,\ P^{(a)}\right\}_{\mathrm{D}} = 1\ . \end{aligned} \tag{6}$$

次に，量子化を行うために，Dirac の手法に従って正準変数を演算子に置き換え，Dirac 括弧式 (6) を基に正準交換関係を定義する．また，量子化に際して，上で得られた第 1 類拘束条件は物理的状態ベクトル $|\Phi\rangle$ を定める条件式 (第 1 類拘束量) $|\Phi\rangle = 0$ に読み替えられる．この式は，波動関数 $\Phi(x,\bar\pi,\pi) = \langle x,\bar\pi,\pi|\Phi\rangle$ が満たす次の連立方程式になる：

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\alpha}} + \bar\pi_\alpha\pi_{\dot\alpha}\right]\Phi(x,\bar\pi,\pi) = 0\ , \tag{7}$$

$$\left[\bar\pi\frac{\partial}{\partial\bar\pi_\alpha} - \pi_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot\alpha}} + \frac{2s}{\hbar}\right]\Phi(x,\bar\pi,\pi) = 0\ . \tag{8}$$

[1] 日大理工・院・量子 [2] 日大理工・院 (後期)・量子 [3] 日大・量科研

式 (7) を解いて求めた平面波解 $\Phi(x,\bar{\pi},\pi)=\tilde{\Phi}(\bar{\pi},\pi)\exp(-\frac{i}{\hbar}x^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}})$ を式 (8) に代入すると $[\bar{\pi}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}_\alpha}-\pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}}+\frac{2s}{\hbar}]\tilde{\Phi}(\bar{\pi},\pi)=0$ が得られる．この式から $\tilde{\Phi}(\bar{\pi},\pi)$ を求め，これを平面波解に代入し，さらにそれらを重ね合わせることで n 階のスピノル場 Ψ を定義する．このスピノル場は次の一般化された Weyl 方程式を満たす：

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1\dot{\alpha}}}\Psi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)=0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\dot{\alpha}_1}}\Psi_{\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_n}(x)=0\ . \tag{9}$$

４．電磁場中のスピンをもつ無質量粒子

電磁場中に存在するスピンをもつ無質量粒子を考えるため，ゲージ原理に従い時空点 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ に依存する局所 U(1) 変換 $\pi_{\dot{\alpha}}\to e^{i\theta(x(\tau))}\pi_{\dot{\alpha}}$，$\bar{\pi}_\alpha\to e^{-i\theta(x(\tau))}\bar{\pi}_\alpha$ を考える．その際，ラグランジアン (5) が不変になるように $A_{\alpha\dot{\alpha}}\to A_{\alpha\dot{\alpha}}+\frac{1}{q_1}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\theta(x)$ と変換する電磁場ポテンシャル $A_{\alpha\dot{\alpha}}(x)$ を導入し，τ 微分を共変微分 $D_\tau:=\frac{d}{d\tau}-iq_1\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}}$ に置き換える．さらに，Lorentz 項 $q_2\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}}$ を加えることで，電磁場中の粒子のラグランジアンが次のように与えられる：

$$\begin{aligned}L=&-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}}-i\left(\psi^\alpha\dot{\bar{\pi}}_\alpha-\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\dot{\pi}_{\dot{\alpha}}\right)\\&+a\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha+\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}}-2s\right)+Q\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}}\ .\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$Q:=q_1(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha+\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}})+q_2$ であり，q_1 と q_2 は結合定数である．また，電磁場は $F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}=\frac{\partial A_{\beta\dot{\beta}}}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}-\frac{\partial A_{\alpha\dot{\alpha}}}{\partial x^{\beta\dot{\beta}}}$ で与えられる．

ラグランジアン (10) から力学変数 $(x^{\alpha\dot{\alpha}},\psi^\alpha,\bar{\psi}^{\dot{\alpha}},a)$ に対する Euler-Lagrange 方程式が得られるが，これらを連立すると $Q\dot{x}^{\beta\dot{\beta}}F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}=0$ が導かれ，粒子に Lorentz 力が働かないことが分かる．さらに，$F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$ が逆行列をもつと仮定すると，この式に $F^{-1\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$ を乗じることで $\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}=0$ が求まり，粒子が静止していることになる．これは，無質量粒子の性質に反するものである．一方，式 (10) に基づく Hamilton 形式において，拘束条件の一つが電磁場の無い場合には第 1 類に，在る場合には第 2 類に分類される．このように，電磁場の存在により拘束条件の扱いに差が生じることは問題となり得る．

以上の問題点を回避する試みとして，ラグランジアン (10) に新たな項を加えた次のラグランジアンを考える：

$$\begin{aligned}L=&-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}}-i\left(\psi^\alpha\dot{\bar{\pi}}_\alpha-\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\dot{\pi}_{\dot{\alpha}}\right)\\&+a\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha+\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}}-2s\right)+Q\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}}\\&+ik\left(\psi^\alpha\bar{\pi}^\beta\bar{F}_{\alpha\beta}-\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi^{\dot{\beta}}F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\right)\ .\end{aligned} \tag{11}$$

ここで，$k=k(\tau)$ は補助変数であり，$\bar{F}_{\alpha\beta}$ と $F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ は $F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$ の既約分解 $F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}=\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{F}_{\alpha\beta}+\epsilon_{\alpha\beta}F_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ で定義される互いに複素共役な対称スピノルである．

修正したラグランジアン (11) から力学変数 $(x^{\alpha\dot{\alpha}},\psi^\alpha,\bar{\psi}^{\dot{\alpha}},a,k)$ に対する Euler-Lagrange 方程式が得られるが，これらを連立すると Lorentz 力を受ける粒子の運動方程式 $\frac{d}{d\tau}(\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}})=Q\dot{x}^{\beta\dot{\beta}}F_{\beta\dot{\beta}\alpha\dot{\alpha}}$ が導かれる．また，同様に Euler-Lagrange 方程式を連立することで，$\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}=\frac{k}{Q}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}}$ が求まる．この式は粒子が光速度で運動することを意味する．このように，新たな項をラグランジアンに加える事で上述の問題点の一部は回避できるが，Hamilton 形式における拘束条件の分類に関しては改善が見られず，依然として問題が残る．

いま，問題となっている拘束条件間の Poisson 括弧は $\{\varphi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}},\varphi^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}\}=QF_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$ である．これより，電磁場が無い場合，拘束条件 $\varphi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ は第 1 類であることが分かる．適切な Lorentz 変換 $L_\mu{}^\nu$ により $F_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}$ を次のような標準形にすることが出来る：

$$F'_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}=L_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{\gamma\dot{\gamma}}F_{\gamma\dot{\gamma}\delta\dot{\delta}}L^{T\delta\dot{\delta}}{}_{\beta\dot{\beta}}=\begin{pmatrix}0&-\Lambda_1&0&0\\\Lambda_1&0&0&0\\0&0&0&-\Lambda_2\\0&0&\Lambda_2&0\end{pmatrix}\ , \tag{12}$$

$$\Lambda_1=\frac{1}{2}\left[F^2+\left\{\left(F^2\right)^2+(F*F)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\ , \tag{13}$$

$$\Lambda_2=\frac{1}{2}\left[\left\{\left(F^2\right)^2+(F*F)^2\right\}^{\frac{1}{2}}-F^2\right]^{\frac{1}{2}}\ . \tag{14}$$

但し，F^2 と $F*F$ は $F^2:=F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ と $F*F:=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ で定義される Lorentz 不変量である．いま，式 (12) において $\Lambda_1=\Lambda_2=0$ のとき，拘束量 $\varphi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ は電磁場が無い場合と同様に，第 1 類拘束条件として扱えることがわかる．また，式 (13) と式 (14) から，このときの電磁場は，$F^2=0$ と $F*F=0$ で特徴付けられるヌル電磁場であることがわかる．

５．まとめと今後の課題

ゲージ原理に基づきスピンをもつ無質量粒子の作用を与え，正準形式を構成し量子化を行った．導かれた連立方程式 (7)，(8) を解くことにより，高階スピンをもつ Weyl 方程式 (9) を導いた．次に，この模型にゲージ原理を用いて電磁場を導入し，さらに Lorentz 項を加えて，粒子の古典力学模型を考察した．ここで，ラグランジアン (10) の Euler-Lagrange 方程式から粒子に Lorentz 力が働かず，静止していることが分かり，一方，拘束条件の分類に問題が生じた．そこで，新たな項を電磁場中の無質量粒子のラグランジアンに組み，問題の一部を解決したが，拘束条件の分類についての問題が依然として残ることが分かった．このことから式（12）を考察し，拘束量 $\varphi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ はヌル電磁場のもとで，第 1 類拘束量として扱えることが分かった．今後の課題として，一般の電磁場中の粒子に対しても拘束量 $\varphi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ が第 1 類拘束量となるように模型を再構築していく．

参考文献

[1] T. Shirafuji, Prog. Theor. Phys. Vol. 70, No. 1, pp18-35, (1983).

[2] S. Deguchi, S. Negishi, S. Okano, T.Suzuki, Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014) 1450044.