O-3

高次元におけるゲージ・ヒッグス統一理論

Gauge-Higgs Unification with extra dimensions

○三宅晴久[1], 二瓶武史[2]
*Haruhisa Miyake[1], Takeshi Nihei[2]

Abstract: We study gauge-Higgs unification (GHU) with extra dimensions. In this model, the Higgs field is treated as one of gauge fields like the photon and weak bosons. We consider an $SU(3)$ gauge theory for simplicity on a five-dimensional orbifold in which the gauge symmetry is broken down to $SU(2)\times U(1)$ at fixed points of the orbifold. We find that the hierarchy problem of the standard model is explained.

1. 目的と背景

2012 年 7 月にヒッグス粒子が発見され, 標準模型で予言されるすべての粒子が検証された [1]. これによりクォークやレプトンといった基本粒子が質量を獲得する原理が解明された. しかし, 標準模型においてもいくつかの問題が指摘されている. その一つに, 階層性問題がある. 標準模型では, ヒッグスの質量を軽く保つような対称性が存在しないため, 輻射補正によりヒッグスの質量に 2 次発散が現れる. この 2 次発散のカットオフスケールをプランク質量 M_{Pl} ($\sim 10^{19}$GeV) でとると, ヒッグスの質量 m_H を 10^2GeV 程度にするために不自然なパラメーターの微調整が必要になる.

この問題の解決策一つとして, 高次元時空におけるゲージ・ヒッグス統一理論が提案されている. そもそも高次元時空の研究は, カルツァ＝クライン理論 (KK 理論) で知られている [2,3]. この理論はコンパクト化された 5 次元目の時空を仮定し, 5 次元の重力場から 4 次元の重力場と電磁場を導き, 重力場と電磁場の統一を試みる理論であった. ゲージ・ヒッグス統一理論ではヒッグス場をゲージ場の一つと考え, 5 次元のゲージ場を仮定することで標準模型における 2 次発散の問題の解決を試みる [4]. ゲージ対称性により, ヒッグスの質量は軽く保たれると期待される.

本研究では, 簡単のため $SU(3)$ のゲージ群のゲージ・ヒッグス統一を用い, ヒッグスの質量を求めるのに必要な 1-loop の有効ポテンシャルを導出する.

2. 5 次元モデルとゲージ場

$SU(3)\times U(1)$ の 5 次元ゲージ場を考え, その 5 次元の時空は Randall-Sundrum (RS) 時空

$$ds^2 = a^2(x_5)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dx_5^2. \tag{1}$$

を用いる [5]. $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量テンソルである. ここで, μ, ν=0, 1, 2, 3 である. また, $a(x_5)$ をワープ因子と呼び, $a(x_5)=e^{-kx_5}$ である. 5 次元方向の 2 つの境界を $x_5=0$ (UV brane) と $x_5=L$ (IR brane) と置く. バルク内のゲージ場は, $A_M = A_M^\alpha T^\alpha$ とする[3]. ただし, $M, N = 0, 1, 2, 3, 5$ である. 5 次元の作用は

$$S_{5D} = \int d^5x\sqrt{g}\Big[-\frac{1}{2g_5^2}\mathrm{tr}(F_{MN}F^{MN}) + \bar{\Psi}(i\Gamma^N D_N - M)\Psi\Big]. \tag{2}$$

ここで, 共変微分 D_N は $D_N = \partial_N - iA_N^\alpha T^\alpha$ であり, g_5 は結合定数である. また, A_M はゲージ場で, $F_{MN} = \nabla_M A_N - \nabla_N A_M + i[A_M, A_N]$ とし, Γ^N は曲がった時空におけるガンマ行列である. ゲージ群 G=$SU(3)$ から H=$SU(2)\times U(1)$ に破る. G, H, G/H の生成子を T^α, T^a, $T^{\hat{a}}$ とする. その境界条件は,

$$\partial_5 A_\mu^a = A_\mu^{\hat{a}} = A_5^a = 0 \ (x_5 = 0, L). \tag{3}$$

この境界条件において, 5 次元の場 $A_5^{\hat{a}}$ から 4 次元のスカラー場であるヒッグス場 $h^{\hat{a}}$ を出していく. これらのスカラー場のポテンシャルは古典レベルで平坦であり, 4 次元における対称性を破った後に南部-ゴールドストーンボソンと解釈される.

3. ゲージボソンの運動方程式

ゲージボソンの運動方程式を求めていく. $h^{\hat{a}}$ の真空期待値を $h \equiv \langle h^{\hat{a}}h^{\hat{a}}\rangle^{1/2}$ で定義し, (2) 式を A^α で変分をし, KK モード展開

$$A_\mu^\alpha(x, x_5) = \sum_n f_n^\alpha(x_5, h)A_{\mu,n}(x) \tag{4}$$

を用いる. h=0 において, A_μ^α の 1 次の項が満たす式は

$$\left[\partial_5^2 + 2\frac{a'}{a}\partial_5 + \frac{m_n^2}{a^2}\right] f_n^\alpha(x_5, 0) = 0. \tag{5}$$

m_n は KK 質量であり, $A_{\mu,n}$ は 4 次元ゲージ場である [6]. (5) 式の一般解は, $f_n^a(x_5, 0) = C_{na}C(x_5, m_n)$, $f_n^{\hat{a}}(x_5, 0) = C_{n,\hat{a}}S(x_5, m_n)$ と書く[4]. $C_{n,a}, C_{n,\hat{a}}$ は規格化定数である.

[1]日大理工・院 (前)・物理
[2]日大・教員・物理
[3]生成子の代数は, $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$, $[T^a, T^{\hat{b}}] = if^{a\hat{b}\hat{c}}T^{\hat{c}}$, $[T^{\hat{a}}, T^{\hat{b}}] = if^{\hat{a}\hat{b}c}T^c$
[4]$C(x_5, m_n)$ と $S(x_5, m_n)$ はベッセル関数 Y_0 と Y_1, J_1 の 1 次結合で表される.

$h \neq 0$ へのゲージ変換は

$$f^\alpha(x_5,h)T^\alpha = \omega^{-1}(x_5,h)f^\alpha(x_5,0)T^\alpha\omega(x_5,h), \tag{6}$$

$$\omega(x_5,h) = \exp\left[-iC_h h^{\hat{a}}T^{\hat{a}}\int^{x_5} dx_5 a^{-2}(x_5)\right]. \tag{7}$$

ここで, $C_h{=}g_5(\int_0^L dx_5 a^{-2})^{-1/2}$ である. また, $C(x_5,m_n)$, $S(x_5,m_n)$ はロンスキアン関係

$$S'(x_5,m_n)C(x_5,m_n){-}C'(x_5,m_n)S(x_5,m_n) = m_n/a^2(x_5) \tag{8}$$

を満たす. また IR brane 上において

$$\begin{aligned}&\cos^2(\lambda_r h/f_h)C'(L,m_n)S(L,m_n)\\ &+\sin^2(\lambda_r h/f_h)S'(L,m_n)C(L,m_n) \quad = 0\end{aligned} \tag{9}$$

をみたす. $h^{\hat{a}}h^{\hat{b}}f^{a\hat{a}\hat{c}}f^{b\hat{b}\hat{c}}$ の固有値を $(\lambda_r h)^2$ と書くと, $\lambda_1 = 0$ は光子, $\lambda_{2,3}{=}\frac{1}{2}$ は $W^\pm$ボソン, $\lambda_4{=}1$ は Z ボソンの固有値に対応している [7]. また f_h は, $f_h^2 = 1/g_5^2\int_0^L dy a^{-2}(y)$ である. (9) 式に (8) 式を用いると,

$$1 + F_{(1)}(m_n^2)\sin^2(\lambda_r h/f_h) = 0, \tag{10}$$

$$F_{(1)}(z^2) = \frac{z}{a_L C'(L,z)S(L,z)}. \tag{11}$$

ここで, $F_{(1)}(z)$ は形状因子と呼ばれている [7].

4. 1-loop の有効ポテンシャル

ヒッグス場 h のポテンシャルは Coleman-Weinberg 機構での量子補正から, 次のように生成される.

$$V = \frac{N}{2}\sum_n \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\log(p^2+m_n^2). \tag{12}$$

N は粒子の符号付き自由度であり, ゲージボソに対して $N{=}3$, フェルミオンに対して $N{=}{-}4$ である. ポテンシャルの基準を変え, 正則化のために d 次元 $(d = 4+\epsilon)$ として計算を行うと,

$$V = \frac{N}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\pi}{d\,\Gamma(d/2)\sin(\pi d/2)}\sum_n m_n^d \tag{13}$$

となる [7]. (13) 式は, KK 質量の無限和になっている. この発散は UR brane, IR brane 上での張力 (宇宙項) で繰り込みを行えることが知られている [8]. その結果, KK 質量の無限和は

$$\sum_n m_n^d \to \frac{d\sin(\pi d/2)}{\pi}\int_0^\infty dp\log\rho(-p^2) \tag{14}$$

となる. ここで, ρ は $\rho(m_n^2) = 0$ となる関数であり

$$\rho(z^2) = 1 + F_{(1)}(z^2)\sin^2\left(\frac{\lambda_r h}{f_h}\right). \tag{15}$$

したがって (13) 式は (14) 式を用いて,

$$V(h) = \sum_r \frac{N_r}{(4\pi)^2}\int_0^\infty dp p^3\log\rho(-p^2) \tag{16}$$

と書き換えられる. この $V(h)$ に含まれる h^2 の項の係数がヒッグスの質量になる.

5. 形状因子の数値的解析

(11) 式の形状因子のグラフの概形を Fig. 1 に示した. $C(x_5,z)$, $S(x_5,z)$ の低エネルギー $(|z^2/a^2| \ll 1)$ における振る舞いは, 次のようになる [7].

$$\begin{aligned}C(x_5,z) &= 1 - z^2\int_0^{x_5} dy y a^{-2}(y) + \mathcal{O}(z^4),\\ S(x_5,z) &= z\int_0^{x_5} dy a^{-2}(y) + \mathcal{O}(z^3)\end{aligned} \tag{17}$$

ゆえに, (11) 式は低エネルギーにおいて, $F_{(1)}(-p^2) \approx \frac{g_5^2 f_h^2}{Lp^2}$ となる. 低エネルギーにおける形状因子の振る舞いは $p = 0$ 付近で (17) 式と一致している. また, 高エネルギーにおける形状因子はゼロに近づき, 有効ポテンシャルに影響を与えないことがわかる.

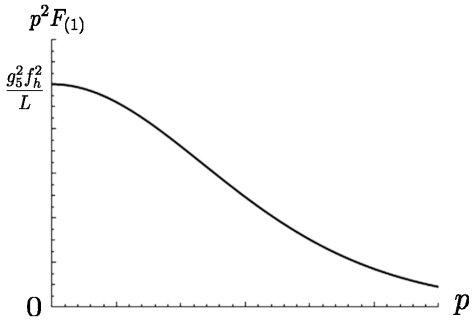

Figure 1. Approximate shape of $p^2F_{(1)}$, $a_L = 10^{-3}$

6. まとめと課題

5 次元時空におけるゲージ・ヒッグス統一理論を用いることで, 標準模型における 2 次発散の問題が解決される. さらに, ヒッグスの質量を求めていくために有効ポテンシャルの 1-loop 補正の計算を行った. その際に, KK 質量の無限和が出てきてしまい, それを UV, IRbrane 上の宇宙項で繰り込みを行った.

ここではゲージボソンの寄与について議論したが, 今後フェルミオンについての λ_r の値や形状因子を求めていく必要がある. そして, ゲージボソンとフェルミオンの有効ポテンシャルから極小値を求めることで, ヒッグスの質量を求めていく.

7. 参考文献

[1] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B716, (2012) 1.
[2] T. Kaluza, Phys. Math. K1, (1921) 966.
[3] O. Klein, Zeits. Phys. 37, (1926) 895.
[4] Y. Hosotani, Phys. Lett. B126, (1983) 309.
[5] L. Rundall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83, (1999) 3370.
[6] A. Pomarol, Phys. Lett. B486, (2000) 153.
[7] A. Falkowski, Phys. Rev. D75, (2007) 025017.
[8] W. Goldberger, Phys. Lett. B491, (2000) 339.