P-1

On hitting probabilities for a random walk with random killing

○久保田直樹[1]

1　はじめに

我々の身の回りには，不規則に運動するものが多く存在する．例えば，酔っぱらい，餌を探しまわる野生動物，スクランブル交差点を渡る人々などが挙げられる．確率論ではこのような不規則に運動するものを，確率過程というモデルで数学的に捉える試みが行われている．代表例としてユークリッド空間上のブラウン運動があり，これは「液体のような溶媒中に浮遊する微粒子が，不規則に運動する現象」を捉えたものである．ブラウン運動は様々な確率過程と密接に関係していて，確率過程の解析において中心的な役割を果たしている．

このブラウン運動を離散的な構造に書き換えたモデルの 1 つとして，正方格子 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 1)$ 上のランダムウォークがある．これは，次のようにして構成される確率過程である: あらかじめ各 2 点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対し推移確率 $p(x,y)$ (すなわち，各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対し $p(x,y) \geq 0$ かつ $\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} p(x,y) = 1$) を設定し，初めにある点に位置する粒子に対して「点 x にいる粒子は単位時間後に確率 $p(x,y)$ で点 y に移動する」という操作を繰り返す．

このような離散モデルを考える理由の 1 つとして，「コンピューターへの応用」が挙げられる．我々の生活する空間はもっぱら 2 または 3 次元ユークリッド空間であるので，ブラウン運動をそのままコンピューターで応用できればよいが，残念ながらコンピューターは連続的構造と相性が悪い．これに対し，離散的構造はプログラミングとの相性が良く，上記のランダムウォークはコンピューターへの幅広い応用が期待できる．適切な設定のもとでは「ランダムウォークのスケール変換でブラウン運動を近似できる (不変原理)」ということが知られていて，この事実は正方格子上のランダムウォークの解析が現実社会において如何に有用かを裏付けている．

そこで今回の講演では，『ランダムな killing を持つ正方格子上のランダムウォーク』というランダムウォークの一種に焦点を当てる．

2　モデル

まず，ランダムな killing を持つ正方格子 $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$ 上のランダムウォークについて大雑把に説明すると，以下の手順で構成される確率過程である:

(1) $\mathbb{Z}^d$ 上の各点にランダムに作動する罠を配置する．

(2) ある点から出発した粒子は罠に掛かるまではランダムウォークをする．

(3) 罠に掛かった場合は墓地 Δ に送られ，そこからは一生脱出することはできない．

独立同分布な非負値確率変数列 $\omega = (\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ (これをポテンシャルと呼ぶ) に対し, 次の推移確率 $p_\omega(x,y)$ を考えることで上記のランダムウォークを厳密に定義できる:

$$p_\omega(x,y) := \begin{cases} e^{-\omega(x)}/(2d), & \|x-y\|_1 = 1 \text{ の場合}, \\ 1 - e^{-\omega(x)}, & x \neq \Delta = y \text{ の場合}, \\ 1, & x = y = \Delta \text{ の場合}, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

ここで，$\|\cdot\|_1$ は d 次元ユークリッド空間上の ℓ^1-ノルムである．このランダムウォークの単位時間ごとの位置を $X_0, X_1, X_2, \ldots$ で表すことにする．

[1] 日大理工・教員・一般

今回問題として扱うのは，「点 x から出発したランダムウォーク $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ が，罠に掛からずに点 y に到達する確率 $e(x,y,\omega)$ の評価」である．この確率は $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 2)$ 上のシンプルランダムウォーク $(S_k)_{k=0}^{\infty}$ (つまり，推移確率 $p(x,y)$ が $\|x-y\|_1 = 1$ のときは一様に $1/(2d)$，その他は 0) を使って，次のように表せることが知られている (詳しくは，[3, pages 249–250] 参照):

$$e(x,y,\omega) = E^x\left[\exp\left\{-\sum_{k=0}^{H(y)-1}\omega(S_k)\right\}\mathbf{1}_{\{H(y)<\infty\}}\right], \qquad x,y \in \mathbb{Z}^d.$$

ここで，E^x は点 x から出発するシンプルランダムウォークの分布 P^x に関する期待値で，$H(y)$ はシンプルランダムウォークの点 y への初到達時刻である (つまり，$H(y) = \inf\{k \geq 0; S_k = y\}$)．直接この確率 $e(x,y,\omega)$ を解析するよりも，$-\log$ をとって “到達するためのコスト”

$$a(x,y,\omega) := -\log e(x,y,\omega)$$

を見る方が技術的に解析し易いため，以下ではこのコストの形で結果を述べることにする．

3　結果

まず最初に，次の条件 (A1)–(A3) を導入する．ただし，$\mathbb{E}$ はポテンシャルの分布 $\mathbb{P}$ に関する期待値である．

(A1) ある $\gamma > 0$ が存在して，$\mathbb{E}[e^{\gamma\omega(0)}] < \infty$.
(A2) $\mathbb{E}[\omega(0)^2] < \infty$.
(A3) 確率変数 $\omega(0)$ の分布は strictly positive support をもつ．

以上の設定のもと，次が今回得られた結果である．

Theorem 1. 条件 (A1) を仮定する．それに加えて，$d = 2$ のときは条件 (A3) も仮定する．このとき，ある定数 $0 < C_1, C_2, C_3 < \infty$ が存在し，十分大きなすべての $x \in \mathbb{Z}^d$ とすべての $t \leq C_1\|x\|_1$ に対して

$$\mathbb{P}\bigl(a(0,x) - \mathbb{E}[a(0,x)] \geq t\|x\|_1^{1/2}\bigr) \leq C_2 e^{-C_3 t}.$$

Theorem 2. 条件 (A2) を仮定する．それに加えて，$d = 2$ のときは条件 (A3) も仮定する．このとき，ある定数 $0 < C_4 < \infty$ が存在し，十分大きなすべての $x \in \mathbb{Z}^d$ とすべての $t \geq 0$ に対して

$$\mathbb{P}\bigl(a(0,x) - \mathbb{E}[a(0,x)] \leq -t\|x\|_1^{1/2}\bigr) \leq e^{-C_4 t^2}.$$

ポテンシャルが上と下から一様に正の定数でおさえられている場合は，Ioffe–Velenik [1, Lemma 4] または Sodin [2, Theorem 1] により，上の定理に対応する結果が既に証明されていた．したがって今回の研究によって，彼らの結果を「非有界かつ 0 を取りうるポテンシャル」に拡張することに成功した．

参考文献

[1] D. Ioffe and Y. Velenik. Stretched polymers in random environment. In *Probability in Complex Physical Systems*, pp. 339–369. Springer, 2012.

[2] S. Sodin. Positive temperature versions of two theorems on first-passage percolation. In *Geometric Aspects of Functional Analysis*, pp. 441–453. Springer, 2014.

[3] M. P. Zerner. Directional decay of the green's function for a random nonnegative potential on $\mathbf{Z}^d$. *Annals of Applied Probability*, pp. 246–280, 1998.