P−3

p 進版 Montel の定理と Julia 集合
p-adic Montel therem and Julia set

西口佑弥 [1]
Yuya Nishiguchi [1]

Abstract: The Julia set of a self-map is defined to be the set over which iterations behave chaotically. In this talk, we consider various dynamical properties of p-adic rational functions, and we especially focus on properties satisfied by their Julia sets.

K を体とし, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ をそれぞれ実数体, 有理数体, 整数環とする.

Definition 1.
$|\ \ | : K \longrightarrow \mathbb{R}$ が任意の $x,\ y \in K$ に対して次を満たすとき, $|\ \ |$ を**非アルキメデス絶対値**という.
(1) $|x| \geq 0$, かつ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $|xy| = |x||y|$
(3) $|x+y| \leq \max\{|x|,\ |y|\}$
また, $k,\ m,\ n \in \mathbb{Z}$, $(p,\ m) = (p,\ n) = 1$ に対して,

$$\mathrm{ord}_p(p^k \times \tfrac{m}{n}) = k$$

で $\mathrm{ord}_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を定義する. $a \in \mathbb{Q}$ に対して, $|a|_p = p^{-\mathrm{ord}_p(a)}$ は (1)〜(3) を満たし, これを p **進絶対値**という.

Definition 2.
$\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ の $|\ \ |_p$ に関する完備化とする.

$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ は $|\ \ |_p$ で完備でない. $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の $|\ \ |_p$ による完備化を $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ とする. このとき,

Theorem 3.
$\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ は代数閉体.

Definition 4.
有理関数 $\phi(z) \in K(z)$ を次のように定義する.

$$\phi(z) = \frac{F(z)}{G(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^d}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^d}$$

ここで, $F(z),\ G(z)$ は共通因子をもたないとする. ϕ の**次数**を

$$\deg\,\phi \;=\; \max\{\deg F,\ \deg G\}$$

とする. また, $\sharp\phi^{-1}(\alpha) \geq 2$ のとき, α を ϕ の**分岐値**という.

Definition 5.
$\phi : K \longrightarrow K$ としたとき,

$$\underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi}_{n\text{ 個}} = \phi \text{ の } n \text{ 重合成}$$

を ϕ^n と表記する.

以後, 有理関数 ϕ の多重合成による $\mathbb{C}_p$ の元の振る舞いを見る. そのために, 次を定義する.

[1] 日大理工・院 (前)・数学

Definition 6.
$\phi : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$ に対して, $\alpha \in \mathbb{C}_p$ が $\phi^n(\alpha) = \alpha$ を満たすとき, α を ϕ の**周期点**という. また, ϕ の周期点の全体を
$\mathrm{Per}(\phi) = \{\alpha \in \mathbb{C}_p : \phi^n(\alpha) = \alpha$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する.$\}$
とする.

Definition 7.
$U \subset \mathbb{C}_p$ を開集合, Φ を $U \longrightarrow \mathbb{C}_p$ となる有理関数の族とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し, 任意の U の元 $\alpha,\ \beta$, 任意の Φ の元 ϕ に対して,

$$|\alpha - \beta| < \delta \Longrightarrow |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| < \epsilon$$

を満たすとき, Φ が U 上**同程度連続**という.

Definition 8.
$\phi : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$ とする. このとき,
$\mathcal{F}(\phi) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{\phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が同程度連続となるような $\mathbb{C}_p$ の最大開部分集合
$\mathcal{J}(\phi) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{J}(\phi) = \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{F}(\phi)$
をそれぞれ ϕ の ***Fatou* 集合**, ***Julia* 集合**という.

次の定理は Montel Theorem with Moving Targets と呼ばれている.

Theorem 9 (Hsia [2])**.**
冪級数 $\phi_1,\ \phi_2 \in \mathbb{C}_p[\![z-a]\!]$ が $\bar{D}(a,\ r) = \{z \in \mathbb{C}_p\colon |z-a|_p \leq r\}$ 上で収束し, かつ

$$\phi_1(\bar{D}(a,\ r)) \cap \phi_2(\bar{D}(a,\ r)) = \emptyset$$

とする. さらに, Φ を $\bar{D}(a,\ r)$ 上で収束する有理型関数の族とし, 任意の $\phi \in \Phi$, $z \in \bar{D}(a,\ r)$ に対して,

$$\phi(z) \neq \phi_1(z) \text{ かつ } \phi(z) \neq \phi_2(z)$$

と仮定する. このとき, Φ は $\bar{D}(a,\ r)$ 上同程度連続である.

特に, $\phi_1(z) = a,\ \phi_2(z) = b$ のように定数関数にすると, Montel の定理の p 進版が得られる. この結果, Julia 集合の特徴として次が得られる.

Theorem 10 (Hsia [2])**.**
$\phi \in \mathbb{C}_p(z)$ を次数 $d \geq 2$ の有理関数とする. $\mathcal{J}(\phi) \neq \emptyset$ のとき, 次が成り立つ.

(1) $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^{-n}(P)} = \mathcal{J}(\phi)$

(2) 任意の $P \in \mathcal{J}(\phi)$ に対して, $P \in \overline{\mathcal{J}(\phi) \setminus \{P\}}$
(3) $\mathcal{J}(\phi)$ は非可算集合

この定理の (2), (3) により, Julia 集合の完全稠密性が分かる. さらに, Hsia によって次も示された.

Theorem 11 (Hsia [2])**.**
$\phi \in \mathbb{C}_p(z)$ を次数 $d \geq 2$ の有理関数とする. このとき,

$$\mathcal{J}(\phi) \subset \overline{\mathrm{Per}(\phi)}$$

すなわち, $\mathcal{J}(\phi)$ は ϕ の周期点集合全体の閉包に含まれる.

Theorem 11 を示すために次の定理を準備する.

Theorem 12 (p 進逆関数定理)**.**
有理関数 $\phi(z) \in \mathbb{C}_p(z)$ を $\deg\phi = \mathrm{d} \geq 2$ とし, a が分岐点の像でないとする. このとき, r を十分小さくとると, 次が成り立つ.
(1) $\bar{D}(a,\ r)$ の ϕ による逆像が

$$\phi^{-1}(\bar{D}(a,\ r)) = V_1 \coprod V_2 \coprod \cdots \coprod V_{\mathrm{d}}$$

となり, V_i は開集合である.
(2) $1 \leq i \leq d$ に対して, ψ_i を ϕ の V_i への制限とすると,

$$\psi_i : V_i \longrightarrow \bar{D}(a,\ r)$$

が全単射となる.
(3) ${\psi_i}^{-1}$ を ϕ_i とすると,

$$\phi_i : \bar{D}(a,\ r) \longrightarrow V_i$$

は $\bar{D}(a,\ r)$ で収束する冪級数となる.

Proof of Theorem 11.
$\mathcal{J}(\phi) \neq \emptyset$ とする. $\mathcal{J}(\phi) \cap U \neq \emptyset$ となる任意の開集合 U に対して, $Q \in U$ で周期点となる Q が存在することを示せば十分である.
$\because$) $P \in \mathcal{J}(\phi) \setminus \overline{\mathrm{Per}(\phi)}$ とする. $\mathbb{C}_p \setminus \overline{\mathrm{Per}(\phi)}$ は開集合なので，$P \in U \subset \mathbb{C}_p \setminus \overline{\mathrm{Per}(\phi)}$ となる開集合 U がとれる. この U に周期点 Q が存在するが，$Q \in U \subset \mathbb{C}_p \setminus \overline{\mathrm{Per}(\phi)}$ となり矛盾.

ϕ の分岐値は有限個で，$\sharp\mathcal{J}(\phi) \cap U = \infty$ なので，$P \in \mathcal{J}(\phi) \cap U$ を分岐値でないようにとる. s を十分小さくとると，$\bar{D}(P,\ s) \subset U$ となり，さらに s を小さくすると Theorem 12 より,

$$\phi^{-1}(\bar{D}(P,\ s)) = V_1 \coprod V_2 \coprod \cdots \coprod V_{\mathrm{d}}$$

となり,

$$\phi_i : \bar{D}(P,\ s) \longrightarrow V_i$$

は $\bar{D}(P,\ s)$ で収束する冪級数となる. この $\phi_1,\ \phi_2$ に対して Theorem 9 を適用する. 仮定より, $\bar{D}(P,\ s)$ は $\mathcal{J}(\phi)$ の元 P を含んでいるので, $\{\phi^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\bar{D}(P,\ s)$ 上同程度連続でない. すると, Theorem 9 の対偶から,

$$\phi^n(Q) = \phi_1(Q) \ \text{または}\ \phi^n(Q) = \phi_2(Q)$$

を満たすような $n \in \mathbb{N},\ Q \in \bar{D}(P,\ s)$ が存在する. $\phi \circ \phi_j = \mathrm{id}$ なので,

$$\phi^{n+1}(Q) = Q$$

となり, $Q \in \mathrm{Per}(\phi)$ である. □

ここで, 乗法因子$\lambda_\alpha(\phi)$ を導入し, Fatou 集合, Julia 集合の性質を見る.

Definition 13.
有理関数 $\phi(z)\ :\ \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$, α を周期点とすると, $\phi^n(\alpha) = \alpha$ となる最小の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\lambda_\alpha(\phi) = (\phi^n)'(\alpha)$$

と定義する。このとき, $|\lambda_\alpha(\phi)|_p > 1$ となる α を反発的であるといい, $|\lambda_\alpha(\phi)|_p \leq 1$ となる α を非反発的であるという.

Theorem 14.
$\phi(z) \in \mathbb{C}_p(z)$ を有理関数で, $\deg\phi \geq 2$ とする. このとき,
(1) $\alpha \in \mathbb{C}_p$ が非反発的周期点ならば, $\alpha \in \mathcal{F}(\phi)$
(2) $\alpha \in \mathbb{C}_p$ が反発的周期点ならば, $\alpha \in \mathcal{J}(\phi)$

Conjecture 15 (Hsia)**.**
$\phi(z) \in \mathbb{C}_p(z)$ を次数 $d \geq 2$ の有理関数とする. このとき, $\mathcal{J}(\phi)$ は ϕ の反発的周期点の全体の閉包と等しい.

予想は, $\phi(z) \in \mathbb{C}(z)$ の場合は証明されている. p 進版ではまだ示されていないが, 予想より強い仮定のもと, Bézivin によって証明されている.

Theorem 16. [1]
有理関数 $\phi(z) \in \mathbb{C}_p(z)$ が少なくとも 1 つ反発的周期点をもつとき, $\mathcal{J}(\phi)$ は ϕ の反発的周期点の全体の閉包と等しい.

参考文献

[1] Jean-Paul Bézivin, *Sur les points périodiques des applications rationnelles en dynamique ultramétrique*, Acta Arith. **100** (2001), no. 1, 63–74.

[2] Liang-Chung Hsia, *Closure of periodic points over a non-Archimedean field*, J. London Math. Soc. (2) **62** (2000), no. 3, 685–700.

[3] Neal Koblitz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 58, Springer-Verlag, New York, 1984.

[4] Joseph H. Silverman, *The arithmetic of dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 241, Springer, New York, 2007.