P-4

重み付きテプリッツグラフ上の離散ソボレフ不等式

Two types of discrete Sobolev inequalities on a weighted Toeplitz graph

○武村　一雄[1]
*Kazuo TAKEMURA[1]

Abstract: Two types of discrete Sobolev inequalities that correspond to the generalized graph Laplacian $\boldsymbol{A}$ on a weighted Toeplitz graph are obtained. The best constants $C_0(a)$ and C_0 are calculated using the Green matrix $\boldsymbol{G}(a) = (\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{I})^{-1}$ $(0 < a < \infty)$ and pseudo-Green matrix $\boldsymbol{G}_* = \boldsymbol{A}^\dagger$(Penrose-Moore generalized inverse matrix of $\boldsymbol{A}$). The best constants are expressed as reciprocals of the harmonic mean corresponding to eigenvalues of each matrix $\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{I}$ and $\boldsymbol{A}$ except an eigenvalue 0.

1. テプリッツグラフとグラフラプラシアン

はじめに，$N = 2, 3, \cdots$ に対して，各辺にある重み付けされたテプリッツグラフ上にグラフラプラシアンを導入する。なお，本研究で扱う重み付きテプリッツグラフは連結された無向グラフとし，自己ループや複数辺をもたないものとする。

定義 1 (テプリッツグラフ)**.** N, $t_1, t_2, \cdots, t_k$ は相異なる正の整数とする。すなわち，$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < N$ である。頂点集合を $V = \{0, 1, \cdots, N-1\}$，辺集合を

$$E = \big\{[i,j] \;\big|\; |i-j| \in \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}\big\} \subset V \times V.$$

とするとき，グラフ (V, E) は $T_N\langle t_1, \cdots, t_k\rangle$ によって表されるテプリッツグラフと呼ばれる。

G が頂点集合 $V = \{0, 1, \cdots, N-1\}$，辺集合

$$\begin{aligned} &E = E_1 \cup E_2 \subset V \times V,\\ &E_1 = \big\{[i,j] \;\big|\; |i-j| \in \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}\big\},\\ &E_2 = \big\{[i,j] \;\big|\; |i-j| \in \{N-t_k, N-t_{k-1}, \cdots, N-t_1\}\big\}, \end{aligned}$$

をもつ重み付きテプリッツグラフとする。$G_1 = (V, E_1)$ と $G_2 = (V, E_2)$ とすると，G はグラフ G_1 と G_2 の和

$$\begin{aligned} G &= G_1 \cup G_2 = T_N\langle t_1, \cdots, t_k\rangle \cup T_N\langle N-t_k, \cdots, N-t_1\rangle \\ &= \begin{cases} T_N\langle t_1, \cdots, t_k, N-t_{k-1}, \cdots, N-t_1\rangle & t_k = N/2, \\ T_N\langle t_1, \cdots, t_k, N-t_k, \cdots, N-t_1\rangle & t_k \neq N/2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ただし，$N, t_1, t_2, \cdots, t_k$ は相異なる正整数とする。すなわち，

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1$$

である。

定義 2 (グラフラプラシアン)**.** 頂点 $V = \{0, 1, \cdots, N-1\}$ をもつグラフを $G = T_N\langle t_1, \cdots, t_k\rangle \cup T_N\langle N-t_k, \cdots, N-t_1\rangle$ とし，さらに，$S = S_1 \cup S_2$, $S_1 = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$, $S_2 = \{N-t_k, N-t_{k-1}, \cdots, N-t_1\}$ とする。このとき，G のグラフラプラシアンは行列

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{B},$$

として定義される。行列 $\boldsymbol{D}$ は G の頂点の次数を表す対角行列

$$diag\{d(0), d(1), \cdots, d(N-1)\}, \quad d(i) = \sum_{j \in S} a_{M(j)} \quad (i \in V), \tag{1}$$

行列 $\boldsymbol{B}$ は重み付きテプリッツグラフ G の隣接行列

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} & & \\ & b(i,j) & \\ & & \end{bmatrix}, \qquad b(i,j) = \begin{cases} a_{M(|i-j|)} & [i,j] \in E, \\ 0 & else \end{cases}$$

である。ただし，$a_i > 0$ $(i \in S_1)$，$M(j) = \min\{j, N-j\}$ とする。

[1]日大理工・教員・一般

$G=(V,E)$ を定義 1 の重み付きテプリッツグラフとするとき，各頂点 $i \in V$ に対して，複素数 $u(i)$ をあてる。このとき，ベクトル $\boldsymbol{u} = {}^t[u(0)\ u(1)\ \cdots\ u(N-1)] \in \mathbb{C}^{|V|}$ に対して，グラフラプラシアンを用いたソボレフエネルギーを次のように定義する。

$$E_N(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\sum_{[i,j]\in E} a_{M(|i-j|)}|u(i)-u(j)|^2 = \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},$$
$$E_N(a;\boldsymbol{u}) = E_N(\boldsymbol{u}) + a\sum_{j\in V}|u(j)|^2 = \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{I})\boldsymbol{u},$$

ただし，a は正定数である。

結果を述べるために，$\boldsymbol{G}(a) = (\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{I})^{-1}$ $(0<a<\infty)$ が $\boldsymbol{A}$ のグリーン行列，$\boldsymbol{G}_*$ が $\boldsymbol{A}$ のペンローズ・ムーアー般化逆行列 $\boldsymbol{A}^\dagger$ である。$\boldsymbol{G}_*$ は擬グリーン行列と呼ぶこともある。$\boldsymbol{G}_*$ は

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_* = \boldsymbol{G}_*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_0, \qquad \boldsymbol{G}_*\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{G}_* = \boldsymbol{O}$$

を満たす。$\boldsymbol{E}_0 = (1/N)\mathbf{1}{}^{\mathbf{t}}\mathbf{1}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_0 = 0$ に対応する固有空間への正射影行列である。$\boldsymbol{G}(a)$ と $\boldsymbol{G}_*$ は関係

$$\boldsymbol{G}_* = \lim_{a\downarrow 0}(\boldsymbol{G}(a) - a^{-1}\boldsymbol{E}_0) \tag{2}$$

をもつ。

2. 結果

本研究の主定理は以下のようにまとめられる。

定理 1. $N=2,3,\cdots$，$V=\{0,1,\cdots,N-1\}$ とする。このとき，任意の $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^{|V|}$ に対して，$\boldsymbol{u}$ と独立したある正定数 C が存在する。すなわち，離散ソボレフ不等式

$$\left(\max_{j\in V}|u(j)|\right)^2 \le CE_N(a;\boldsymbol{u}) \tag{3}$$

が成立する。正定数 C のうち，最良の定数 $C(a)$ は

$$C(a) = C(N;a) = \frac{1}{|V|}\sum_{j\in V}\frac{1}{a+\lambda_j} \tag{4}$$

である。正定数 C を $C(N;a)$ に置き換えると，等式が $\boldsymbol{G}(a)$ の任意の列ベクトルに対して成立する。

定理 2. $N=2,3,\cdots$，$V=\{0,1,\cdots,N-1\}$ とする。このとき，${}^t\mathbf{1}\boldsymbol{u}=0$ を満たす任意の $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^{|V|}$ に対して，$\boldsymbol{u}$ と独立したある正定数 C が存在する。すなわち，離散ソボレフ不等式

$$\left(\max_{j\in V}|u(j)|\right)^2 \le CE_N(\boldsymbol{u}) \tag{5}$$

が成立する。正定数 C のうち，最良の定数 C_0 は

$$C_0 = C_0(N) = \frac{1}{|V|}\sum_{j\in V\setminus\{0\}}\frac{1}{\lambda_j} \tag{6}$$

である。正定数 C を $C_0(N)$ に置き換えると，等式が $\boldsymbol{G}_*$ の任意の列ベクトルに対して成立する。

参考文献

[1] H. Yamagishi, Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai and K. Takemura (2013), *The best constant of three kinds of discrete Sobolev inequalities on regular polyhedron,* Tokyo J. Math. **36**(1), pp. 253–268.

[2] K. Takemura (2014), *The best constants of discrete Sobolev inequalities on Möbius ladder,* Far East J. Math. Sci. **86**(2), pp. 233–248.

[3] Y. Kametaka, A. Nagai, H. Yamagishi, K. Takemura and K. Watanabe (2015), *The Best Constant of Discrete Sobolev Inequality on the C60 Fullerene Buckyball,* J. Phys. Soc. Jpn. **84**, 074004(2015).