P−5

$\mathcal{M}$-dependent 確率変数列に対する Bahadur 表現について

A note on the Bahadur representation of sample quantiles for $\mathcal{M}$-dependent random variables

○高橋　弘[1]
*Hiroshi TAKAHASHI[1]

Abstract: In the case of independent random variables, Bahadur introduced a representation for a sample quantile and the empirical distribution function. Following his pioneer work, many studies have been extended the Bahadur representation. For dependence random variables, Sen obtained the first extended result to the case of m-dependent random variables. Recently, Berkes *et al.* introduced the notion of weakly $\mathcal{M}$-dependent random variables, which is an extension of m-dependence. In this talk, we show that the Bahadur representation holds for some weakly $\mathcal{M}$-dependent random variables.

1. 序論

$\{X_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された強定常確率変数列で，共通の分布関数 $F(x) = P(\xi_i \le x)$ に従うものとする。$p \in (0,1)$ を固定して，F の p-quantile を

$$\xi_p = \inf\{x : F(x) \ge p\}$$

とする。Bahadur([1]) は，$\{X_n\}$ が独立で F が適切な条件を満たすときに，$\{X_n\}$ の経験分布

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x), \qquad 0 < x < 1$$

と F の密度関数 f を用いて，

$$F_n^{-1}(p) = \xi_p + \frac{p - F_n(\xi_p)}{f(\xi_p)} + R_n, \qquad R_n = O(n^{-3/4}(\log n)^{1/2}(\log\log n)^{1/4})$$

という表現を与えた。この表現に関して，$\mathcal{M}$-dependence と呼ばれる従属性を持つ確率変数列の場合を考察する。

確率変数列に対する σ-集合体を $\mathbf{M}_a^b = \sigma\{X_a, X_{a+1}, \ldots, X_b\}$ $(a < b)$ で表し

$$\alpha(n) = \sup_{k \ge 1} \sup_{A \in \mathbf{M}_1^k, B \in \mathbf{M}_{n+k}^{\infty}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|$$

とする。$\alpha(n) \to 0$ as $n \to \infty$ が成立するときは，$\{X_n\}$ は強混合型条件を満たすという。特に

$$\alpha(n) = 0, \qquad n \ge m+1$$

が成立するとき，この確率変数列は m-dependent であるという。従属性を持つ確率変数列に対する Bahadur 表現の研究は，Sen([3]) による m-dependent 確率変数列の場合から始まり，強混合条件を満たす確率変数列について Bahadur 表現が与えられる $\alpha(n)$ の十分条件が調べられている (Yoshihara([5]), Xing et al.([4]))。

Berkes et al. は，次の $\mathcal{M}$-dependent 確率変数列を考察した ([2])：

定義　強定常確率変数列 $\{X_n\}$ が $\mathcal{M}$-dependent in L^r with a rate $\delta(\cdot)$ とは，次の 2 つの条件を満たすことである：

(i) 任意の $n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}$ について，$X_n^{(m)}$ が存在して

$$\|X_n - X_n^{(m)}\|_r \le \delta(m) \downarrow 0 \text{ as } m \to \infty,$$

ここで，$\|X\|_r := \{E[|X|^r]\}^{1/r}$ for a fixed $r > 0$ とする。

(ii) 互いに共通部分を持たない，任意の自然数の集合 $I_1, I_2, \ldots, I_q$ に対して，

$$d(I_j, I_k) := \inf\{|a_j - b_k| : a_j \in I_j, b_k \in I_k\}$$

とする。このとき任意の自然数 $m_1, m_2, \ldots, m_q$ について，$d(I_k, I_l) > \max\{m_k, m_l\}$ ならば，$\{X_{j_1}^{(m_1)}, j_1 \in I_1\}, \{X_{j_2}^{(m_2)}, j_2 \in I_2\}, \ldots, \{X_{j_q}^{(m_q)}, j_q \in I_q\}$ は，各々独立である。

[1]日大理工・教員・一般

2. 結果

$\mathcal{M}$-dependent 確率変数列に対して，以下の条件の下で Bahadur 表現を得る：

定理　$r > 4$ で，任意の m について $A > 4$ と定数 C が存在して $\delta(m) \leq Cm^{-A}$ である $\mathcal{M}$-dependent 確率変数列 $\{X_n\}$ に対して，次を仮定する：

(i) $F(x)$ は，ξ_p の近傍で絶対連続である。

(ii) $F(x)$ は，連続で有限の値をとる密度関数を持つ。

また，$J_n = \left\{x : \xi_p - n^{-1/2}\log n \leq x \leq \xi_p + n^{-1/2}\log n\right\}$ とする。このとき，

$$\sup_{x\in J_n} |\{F_n(x) - F(x)\} - \{F_n(\xi_p) - p\}| = O\big(n^{-3/4}\log n\big) \quad \text{a.s.} \tag{1}$$

as $n \to \infty$ が成立する。

ここで，上記の定理の条件の下で，$0 \leq u \leq 1$ に対し，$g_x(u) := I(u \leq x) - F(x)$ とするとき

$$E[\{g_x(X_1)\}^2] + 2\sum_{j=2}^{\infty} E\left[g_x(X_1)g_x(X_j)\right] := \sigma_p^2$$

の値が存在する。ここで $\sigma_p > 0$ とすると，次の中心極限定理に対応する結果を得る：

系　定理の条件に加え，次の条件も仮定する：

(iii) ξ_p の近傍の x で，$0 < f^{'}(x) < M$ を満たす M が存在する。

このとき，以下が成立する：

$$\text{(I)} \quad \left|n^{1/2}(F_n^{-1}(p) - \xi_p)f(\xi_p) + n^{1/2}(F_n(\xi_p) - p)\right| = O(n^{-1/4}\log n) \quad \text{a.s.}$$

$$\text{(II)} \quad \frac{n^{1/2}f(\xi_p)}{\sigma_p}(F_n^{-1}(p) - \xi_p) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1).$$

また，強混合条件を満たす確率変数列に対して，以下の条件の下で Bahadur 表現を得る：

系　$\{X_i\}$ は強混合型条件を満たす有界な確率変数列で，以下を満たすものとする：

(i) $\{X_i\}$ の分布関数 $F(x)$ は，定理の 2 つの条件を満たしている。

(ii) $\alpha(n) \leq n^{-(2+\epsilon)}$ for any $\epsilon > 0$ が成立する。

このとき，上記 (1) と同じ Bahadur 表現が成立する。

参考文献

[1] Bahadur, R. R. (1966). A note on quantiles in large samples. *Ann. Math. Stat.* **37**: 577-580.

[2] Berkes, I., Hörmann, S. and Schaver, J. (2011). Split invariance principles for stationary processes. *Ann. Prob.* **39**: 2441-2473.

[3] Sen, P. K. (1968) Asymptotic normality of sample quantiles for m-dependent processes. *Ann. Math. Statist.* **39**: 1724-1730.

[4] Xing, G., Yang, S., Liu, Y. and Yu, K. (2012) A note on the Bahadur representation of sample quantiles for α-mixing random variables. *Monatsh. Math.* **165**: 579-596.

[5] Yoshihara, K (1995) The Bahadur representation of sample quantiles for sequences of strongly mixing random variables. *Stat. Prob. Lett.* **24**: 299-304.