P-6

p-Laplace 作用素の第一固有関数の存在と一意性について

Existence and uniqueness for the first eigenfunction of the p-Laplace operator

葛岡 良貢 [1]
Yoshitsugu Kuzuoka[1]

Abstract: We consider the existence and uniqueness for the first eigenfunction of the p-Laplace operator by the methods of Lindqvist [4]. First, we show the existence for the first eigenfunction by Sobolev's compact embedding theorem and lower semicontinuity with respect to the weak convergence. Next, we prove the uniqueness for the first eigenfunction without any smoothness conditions on domains.

1. p-Laplace 作用素の固有値問題

$n \in \mathbb{N}$ と有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, 1 < p < \infty$ に対して,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = \lambda |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

を考える. ここで, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ は未知関数, λ は未知定数である. $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ であり, ベクトル場 $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ に対して, $\operatorname{div} F = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}$ である. また,

$$\begin{aligned} \Delta_p u &:= \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) \\ &= |Du|^{p-2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \\ &\quad + (p-2)\,|Du|^{p-4} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \end{aligned}$$

を p-Laplace 作用素という. この方程式は, $v \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して, $F[v] := \frac{\|Du\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}}$ の最小値を求める問題 (変分問題) に関係している. ここで,

$$\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |v|^p dx,$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R}, \text{無限回微分可能}, \operatorname{supp}\varphi \text{ はコンパクト} \},$$

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \cap \Omega$$

である.

注意 1.1. $p = 2$ のとき, 通常の線形の Laplace 作用素である. u が方程式 (1) の解ならば, $k \in \mathbb{R}$ に対して, ku も解となる. しかし, $p \neq 2$ のときは u, v が方程式 (1) の解であったとしても, $u + v$ が (1) の解になるとは限らない. したがって, $p \neq 2$ のとき (1) は非線形偏微分方程式である.

注意 1.2. $w := \frac{v}{\|v\|_{L^p(\Omega)}}$ とすれば, $\|w\|^p_{L^p(\Omega)} = 1$ であり, $\frac{\|Dv\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|v\|^p_{L^p(\Omega)}} = \|Dw\|^p_{L^p(\Omega)}$ となる. したがって, $\|w\|^p_{L^p(\Omega)} = 1$ の制約条件下における $\|Dw\|^p_{L^p(\Omega)}$ の変分問題と同値である.

本研究では, Lindqvist による (1) の弱解の存在と本質的一意性についての解析手法を考察する.

2. 弱微分と Sobolev 空間

固有関数を滑らかな関数空間でみつけるのは非常に難しい. そのため, より広い空間であるソボレフ空間を導入する.

定義 2.1 (弱微分)**.** 局所可積分関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ について,

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g\varphi dx$$

をみたす局所可積分関数 $g : \Omega \to \mathbb{R}$ を f の弱微分といい, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g$ とかく. ここで, 局所可積分な関数とは, Ω に含まれる任意のコンパクト集合 K に対して, K 上 Lebesgue 積分可能な関数である.

注意 2.2. f が Ω 上で古典的な意味で微分可能ならば, 弱微分 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は古典的微分と一致することが Gauss の発散定理からわかる.

定義 2.3 (Sobolev 空間)**.** $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して, $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ と定め, 任意の $\varphi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ に対して, $D^\alpha \varphi := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \varphi$ と定める. $k \in \mathbb{N}, 1 \leqq p \leqq \infty$ に対して, Sobolev 空間 $W^{k,p}(\Omega)$ を

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \text{すべての } |\alpha| \leqq k \text{ に対して弱微分 } D^\alpha f \text{ が存在して}, D^\alpha f \in L^p(\Omega)\} \tag{2}$$

と定義する. また, $f \in W^{k,p}(\Omega)$ に対して, $W^{k,p}(\Omega)$ 上の f のノルムを

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leqq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$$

で定める.

1: 日大理工・院 (前)・数学

$k \in \mathbb{N}, 1 \leqq p < \infty$ に対して, $C_0^\infty(\Omega)$ の $W^{k,p}(\Omega)$ における閉包を $W_0^{k,p}(\Omega)$ とかく. すなわち, $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$ である.

注意 2.4. (1) の境界条件 $u = 0$ on $\partial\Omega$ は $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ で定式化できる.

3. 第一固有関数の存在

定義 3.1 (弱解)**.** 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して,

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}\, Du \cdot D\varphi\, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}\, u\varphi\, dx \qquad (3)$$

をみたす $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ を, 方程式 (1) の弱解という.

定理 3.2 (解の存在)**.** $F[v]$ の $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に関する下限を λ とする. このとき, 方程式 (1) の弱解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ が存在する.

定理 3.2 の証明の概略. 注意 1.2 より,

$$\lambda = \inf\left\{\|Dv\|^p_{L^p(\Omega)} : v \in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|^p_{L^p(\Omega)} = 1\right\} \qquad (4)$$

が成り立つ. $W_0^{1,p}(\Omega)$ の (4) に関する最小化列を取り, Sobolev のコンパクト埋め込み ([2] 参照) と $\|Du\|^p_{L^p(\Omega)}$ の $W_0^{1,p}(\Omega)$ における弱下半連続性 ([2] 参照) を用いて, $\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 1, \|Du\|^p_{L^p(\Omega)} = \lambda$ をみたす $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が存在することを示す. 次に, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して, $t = 0$ の近傍で,

$$h(t) := \frac{\|Du + tD\varphi\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u + t\varphi\|^p_{L^p(\Omega)}}$$

を考えると, $h(0) = \lambda$ より, $t = 0$ で極小値を取ることがわかる. $\frac{d}{dt}h(0) = 0$ を計算すると,

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}\, Du \cdot D\varphi\, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}\, u\varphi\, dx$$

となる. よって, (1) を定義 3.1 の意味でみたす. □

4. 第一固有関数の本質的一意性

定理 4.1 (本質的一意性, Lindqvist [4])**.** $p \geqq 2$ とし, λ を (3) で与えられた固有値, u, v は固有値 λ に対する固有関数, すなわち (1) の弱解とする. このとき, u と v は平行である. すなわち, ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して, $u = kv$ が成り立つ.

注意 1.1 により, u が固有関数ならば, $k \in \mathbb{R}$ に対して, ku も固有関数となる. したがって, 定理 4.1 は定理 3.2 でとれる第一固有関数が一意であることを主張している. つまり, 第一固有関数のなす集合が 1 次元の線形空間となる.

定理 4.1 の証明の概略. Harnack の不等式より, $u, v \geqq 0$ としてよい ([5] 参照). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $u_\varepsilon = u+\varepsilon, v_\varepsilon = v + \varepsilon$ とおく. テスト関数を

$$\eta_\varepsilon = u_\varepsilon\left(1 - \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right), \theta_\varepsilon = v_\varepsilon\left(1 - \left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right) \qquad (5)$$

とおき, (3) の φ として $\eta_\varepsilon, \theta_\varepsilon$ をそれぞれ代入すると, Clarkson の不等式の精密化により,

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_\Omega \left(\frac{u^{p-1}}{u_\varepsilon^{p-1}} - \frac{v^{p-1}}{v_\varepsilon^{p-1}}\right)(u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\, dx \\
&= \int_\Omega (u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\left(|D\log u_\varepsilon|^p - |D\log v_\varepsilon|^p\right) dx \\
&\quad - p\int_\Omega v_\varepsilon^p\, |D\log u_\varepsilon|^{p-2}\, D\log u_\varepsilon \cdot (D\log v_\varepsilon - D\log u_\varepsilon)\, dx \\
&\quad - p\int_\Omega u_\varepsilon^p\, |D\log v_\varepsilon|^{p-2}\, D\log v_\varepsilon \cdot (D\log u_\varepsilon - D\log v_\varepsilon)\, dx \\
&\geqq C_p \int_\Omega \left(\frac{1}{u_\varepsilon^p} + \frac{1}{v_\varepsilon^p}\right)|v_\varepsilon Du_\varepsilon - u_\varepsilon Dv_\varepsilon|^p\, dx
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, $C_p > 0$ は p だけによる定数である. Lebesgue の優収束定理 ([3] 参照) と Fatou の補題 ([3] 参照) から, $vDu - uDv = 0$ となる. したがって, (形式的に) $D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vDu - uDv}{v^2} = 0$ だから, ある $k \in \mathbb{R}$ があって $\frac{u}{v} = k$ となる. よって, $u = kv$ となる. すなわち, u と v は平行である. □

注意 4.2. (5) のテスト関数を形式的に $\varepsilon \to 0$ とすると,

$$\eta = u\left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^p\right), \theta = v\left(1 - \left(\frac{u}{v}\right)^p\right)$$

となるが, $u = 0$ on $\partial\Omega$ から $\frac{u}{v}$, $\frac{v}{u}$ が Ω の境界で定義できるかわからない. したがって, 境界近傍で $\frac{u}{v}$, $\frac{v}{u}$ がどのような挙動をするかを調べて, η, θ がテスト関数として利用できることを考察する必要がある. 先行結果 [1] では, 領域 Ω の境界に C^2 級を仮定することで, 境界近傍の挙動を解析し, η, θ がテスト関数として利用できることを示した. これに対して, $\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}$, $\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}$ は境界で定義でき, η_ε, $\theta_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ から, 境界に条件を加えずともテスト関数として利用することができる.

5. 参考文献

[1] A. Anane, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du p-laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), 725–728.

[2] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Third edition, Springer, 2005.

[3] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, Second edition, American Mathematical Society, 2001.

[4] P. Lindqvist, *On the equation* $\operatorname{div}(|Du|^{p-2}\, Du) + \lambda\, |u|^{p-2}\, u = 0$, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 157–164.

[5] N. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 721–747.