P−7

凸体定理とその応用

Convex body theorem and its applications

○平良亮太 [1]
Ryota Taira

Abstract: In this talk, we discuss convex body theorem due to H. Minkowski. We present sufficient conditions such that a convex body contains a non-zero lattice point. We show several useful applications of the theorem to solve a system of linear inequalities in rational integers.

1. 導入

数の幾何学とは, 整数や有理数などの数をユークリッド空間等の点と対応させ, 幾何学を用いて数論に役立つ諸性質を考察する手法であり，H. Minkowski によって創成された. ここでは数の幾何学を用いて証明する代表的な定理を紹介する．最初に凸集合と凸体を定義して主定理を述べ，その応用として得られる主張を示す. 定理 3,4,5 は定理 2 及びその証明より従う.

定義　$x_1,\ldots,x_n$ を座標とする n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において, 座標がすべて有理整数である点を格子点という. 格子点全体の集合を $\mathbb{Z}^n$ と書く.

定義　$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 M を考える.

$$\mathbf{x},\mathbf{y}\in M, 0\le\alpha\le 1 \Longrightarrow \alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{x}\in M$$

が成り立つとき M を凸集合という.
$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 M について,

$$\mathbf{x}\in M \Longrightarrow -\mathbf{x}\in M$$

となるとき,M は原点に対して対称な集合であるという. 原点を内点として含むコンパクトな凸集合 M が原点に対して対称であるとき，M は凸体であるという.

2. 凸体定理

凸体に関して基本的な定理を述べよう.

定理 1 (凸体定理, Minkowski) 凸集合および凸体について, 以下が成り立つ.

(i) $\mathbb{R}^n$ の凸集合 M が原点に関して対称であり，体積 $v(M)>2^n$ をもつならば,M は原点と異なる格子点を必ず含む.

(ii) $\mathbb{R}^n$ の凸体 M が体積 $v(M)\ge 2^n$ をもつならば,M は原点と異なる格子点を必ず含む.

この定理は数の幾何学を用いて証明されるが，C. L. Siegel による別証明もある．凸体定理の応用として得られる定理を以下に紹介しよう.

定理 2　$n=r_1+2r_2$ 個の複素係数 1 次形式 $f_i(\mathbf{x})=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n\ (1\le i\le n)$ が以下の $*$ を満たすとする.

$$\left.\begin{array}{l} f_i\text{は実形式}\quad (1\le i\le r_1),\\ f_i\text{と }f_{r_2+i}\text{は複素共役な複素形式 }(r_1+1\le i\le r_1+r_2),\\ \text{係数行列}\Delta=\det(a_{ij})\ (1\le i,j\le n)\text{ に対し}\Delta\neq 0. \end{array}\right\} *$$

n 個の正の実数 $k_i(1\le i\le n)$ が $r_1+1\le i\le r_1+r_2$ に対しては $k_i=k_{r_2+i}$ であり, かつ $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}k_i\ge\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}|\Delta|$ であるとする. このとき

$$|f_i(\mathbf{x})|\le k_i\quad (i=1,\ldots,n)$$

をみたす解 $\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$ が存在する.

証明　まず $M=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n||f_i(\mathbf{x})|\le k_i(1\le i\le n)\}$ は凸体であることを示す.
M が $\mathbf{0}$ を含む有界閉集合であることは定義から従う. $\mathbf{x}\in M$ ならば $|f_i(-\mathbf{x})|=|f_i(\mathbf{x})|$ であるから $-\mathbf{x}\in M$. したがって M は原点に関して対称.
また $\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in M$ に対し,$0\le\alpha\le 1$ ならば,

$$\begin{aligned}|f_i(\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y})| &\le \alpha|f_i(\mathbf{x})|+(1-\alpha)|f_i(\mathbf{y})|\\ &\le\{\alpha+(1-\alpha)\}k_i=k_i\end{aligned}$$

より $\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y}\in M$ となる．$\therefore M$ は凸集合である.
M は体積 $v(M)$ をもつので, この $v(M)$ を求めよう.

$$f_s(\mathbf{x})=u_s\ (1\le s\le r_1),$$

$$f_{r_1+t}(\mathbf{x})=v_te^{\sqrt{-1}\theta_t}\ (1\le t\le r_2)$$

によって $x_1,\ldots,x_n$ を $u_1,\ldots,u_{r_1},v_1,\ldots,v_{r_2},\theta_1,\ldots,\theta_{r_2}$ $(0\le\theta_t<2\pi)$ に変数変換する.

1: 日大理工・院 (前)・数学

このとき M は集合 $M'=\{(u_1,\dots,v_1,\dots,\theta_1,\dots)|\ |u_s|\le k_s, 0\le v_t\le k_t, 0\le\theta_t<2\pi\}$ と 1 対 1 対応し, 変数変換のヤコビアンは,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,v_1,\dots,\theta_1,\dots,\theta_{r_2})}\\&=\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right)^{-1}\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(u_1,\dots,v_1,\dots,\theta_1,\dots,\theta_{r_2})}\right)\\&=\pm\Delta^{-1}\prod_{t=1}^{r_2}\left|\begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_t} & e^{-\sqrt{-1}\theta_t}\\ \sqrt{-1}v_te^{\sqrt{-1}\theta_t} & -\sqrt{-1}v_te^{-\sqrt{-1}\theta_t}\end{pmatrix}\right|\\&=\pm\Delta^{-1}2^{r_2}(\sqrt{-1})^{r_2}v_1\dots v_{r_2}.\end{aligned}$$

これより,M の体積は

$$\begin{aligned}v(M)&=\int_M\dots\int dx_1\dots dx_n\\&=\int_{M'}\dots\int\\&\quad\times\left|\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,\theta_{r_2})}\right|du_1\dots dv_1\dots d\theta_1\dots d\theta_{r_2}\\&=\frac{2^{r_2}}{|\Delta|}\prod_{s=1}^{r_1}\int_{-k_s}^{k_s}du_s\prod_{t=1}^{r_2}\int_0^{k_t}v_tdv_t\prod_{t=1}^{r_1}\int_0^{2\pi}d\theta_t\\&=\frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}}{|\Delta|}\prod_{i=1}^{n}k_i.\end{aligned}$$

ここで $\prod_{i=1}^{n}k_i\ge\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2}|\Delta|$ より $v(M)\ge 2^n$ であるから, 定理 *1* により M は原点以外の格子点を含む.　□

以下, 定理 2 の精密化とその応用に関して述べる.

定理 3　$n=r_1+2r_2$ 個の複素係数 1 次形式 $f_i(\mathbf{x})=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n\ (1\le i\le n)$ が定理 *2* の仮定 $*$ を満たすとする. n 個の正の実数 $k_i(1\le i\le n)$ が $r_1+1\le i\le r_1+r_2$ に対しては $k_i=k_{r_2+i}$ であり, かつ $\prod_{i=1}^{n}k_i\ge|\Delta|$ をみたすとする. このとき次が成り立つ.

(i) $f_1,\dots,f_n$ のうちに実形式でないものが存在すれば

$$|f_i(\mathbf{x})|<k_i\ (i=1,\dots,n)$$

をみたす解 $\mathbf{0}\ne\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$ が存在する.

(ii) $f_1,\dots,f_n$ がすべて実形式ならば

$$|f_1(\mathbf{x})|\le k_1,|f_2|<k_2,\dots,|f_n|<k_n$$

をみたす解 $\mathbf{0}\ne\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$ が存在する.

上記は定理 2 の精密化に相当する. また下記の定理は定理 2 と同じ証明を繰り返すことによって示される.

定理 4　$n=r_1+2r_2$ 個の複素係数 1 次形式 $f_i(\mathbf{x})=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n\ (1\le i\le n)$ が定理 *2* の仮定 $*$ を満たすとする. また t を

$$t\ge\left(\frac{2^{2r_2}n!|\Delta|}{\pi^{r_2}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

をみたす実数とする. このとき

$$|f_1(\mathbf{x})|+\dots+|f_n(\mathbf{x})|\le t$$

は解 $\mathbf{0}\ne\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$ を持つ.

この定理 4 と相加相乗平均の不等式を組み合わせると, 次が得られる.

定理 5　$n=r_1+2r_2$ 個の複素係数 1 次形式 $f_i(\mathbf{x})=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n\ (1\le i\le n)$ が定理 *2* の仮定 $*$ を満たすとする. このとき,

$$\prod_{i=1}^{n}|f_i(\mathbf{x})|\le\left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2}\frac{n!}{n^n}|\Delta|$$

をみたす解 $\mathbf{0}\ne\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$ が存在する.

定理 5 を変形すると次が示せる.

系 1　$n=r_1+2r_2$ 個の複素係数 1 次形式 $f_i(\mathbf{x})=a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n\ (1\le i\le n)$ が定理 *2* の仮定 $*$ を満たすとする. このとき,

$$\prod_{i=1}^{n}|f_i(\mathbf{x})|<|\Delta|$$

をみたす解 $\mathbf{0}\ne\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$ が存在する.

参考文献

[1] 藤崎源次郎, **代数的整数論入門**, 裳華房, (1975).

[2] 石田　信, **代数学入門**, 実教出版, (1978).

[3] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen von H. Minkowski*, first edition in 1911, reprinted by AMS Chelsea, (1967).

[4] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., 785, Springer, (1980).

[5] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation and Diophantine Equations*, Lecture Notes in Math., 1467, Springer, (1991).