P-9

4 次元キャビティフローの計算と可視化
Computation of a Four-Dimensional Cavity Flow and Its Visualization

○渥見 友章 [1], 小紫 誠子 [2]
*Tomoaki Atsumi[1], Satoko Komurasaki[2]

Abstract
Analysis of flow structures in a different dimensional-space may lead to essential understanding of flow phenomena. In this study, the interest is in how a flow field will change in a different dimension. Therefore, a 4-dimensional flow inside the hypercube which is called a cavity flow in a 3-dimensional case, is simulated. The 4-dimensional incompressible Navier-Stokes equations are solved by a finite-difference method. The computed 4-dimensional flow field is projected changing the direction and visualized on a 2-dimensional plane.

1. 緒論

キャビティフローとは，溝あるいは窪みの内部で生じる流れである．ここでは，4 次元超立方体形状の窪み内の流れを考える．これは，3 次元における立方体形状の窪み内の流れを，4 次元に拡張したものであり，境界を構成している 8 つの胞のうちの 1 つを移動境界として，窪み内で生じる流れを扱うものである．

流れの 3 次元性を無視した 2 次元流れでは，2 次元空間内で渦が強く現れるなど一般に 3 次元流れとは異なるが，異次元空間での現象の違いが，本質的な流体現象の理解を助けることもある．同様にして，4 次元流れを観察することで，実現の 3 次元流れとの差異から現象を理解しようとするアプローチも考えられる．乱流解析においては，すでに高次元空間での解析も試みられているが，より大域的な流れの解析を目的として 4 次元流れの解析は行われていない．

本研究では，3 次元から 4 次元に次元を上げたときの流れ場の変化を調べることを目的として，4 次元超立方体内部を流れる 4 次元流れの数値シミュレーションを行う．流体解析においては，流れ場の可視化が重要であるが，通常の 2 次元平面での可視化は，投影変換によって次元が下がることによる情報の損失に加えて，4 次元流れが非現実の現象であることから，4 次元の流れ場を直感的に理解することは困難である．ここでは，2 次元平面への投影による情報損失を補うべく，投影の方向を 4 次元空間内で種々に変化させて，4 次元流れの構造をできるだけ分かり易く視覚的に捉えることに挑戦する．

2. 計算方法

2.1 支配方程式

本計算では支配方程式として 4 次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式を用いる．

4 次元の連続の式

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}+\frac{\partial u_4}{\partial w}=0 \tag{1}$$

4 次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}+u_3\frac{\partial u_1}{\partial z}+u_4\frac{\partial u_1}{\partial w} =-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial w^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_2}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial y}+u_3\frac{\partial u_2}{\partial z}+u_4\frac{\partial u_2}{\partial w} =-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial w^2}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_3}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_3}{\partial y}+u_3\frac{\partial u_3}{\partial z}+u_4\frac{\partial u_3}{\partial w} =-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial w^2}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_4}{\partial x}+u_2\frac{\partial u_4}{\partial y}+u_3\frac{\partial u_4}{\partial z}+u_4\frac{\partial u_4}{\partial w} =-\frac{\partial p}{\partial w}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_4}{\partial w^2}\right) \tag{5}$$

2.2 4 次元超立方体

Figure 1. のように，立方体は正方形を z 軸に沿って平行移動させたときの軌跡である．同様にして，4 次元超立方体は立方体を w 軸に沿って平行移動した軌跡として与えられる．3 次元の立方体では境界は 6 枚の正方形であるのに対し，4 次元超立方体では境界は 8 個の立方体となっている．

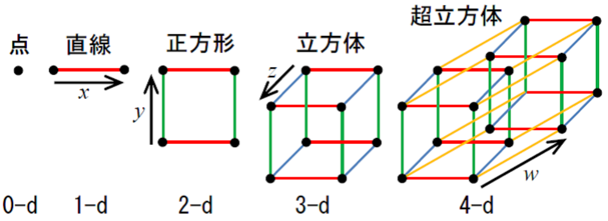


Figure 1. Hypercube

2.3 計算条件

一辺が 1 の 4 次元超立方体を計算領域とする $(0 \le x, y, z, w \le 1)$．$z = 1$ においては移動境界とし，移動速度は w によって変化させる．それ以外の境界では滑り無し条件を課す．レイノルズ数は $\mathrm{Re} = 100$ とした．具体的な境界条件は以下の通りである．

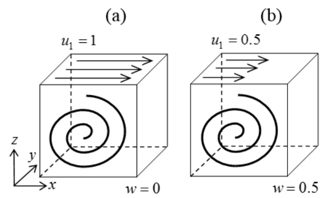


Figure 2. Boundary Conditions

$$\mathbf{x} = (x, y, z, w)\ (0 \le x, y, z, w \le 1) \tag{6}$$

$$\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \tag{7}$$

$$u_1(x, y, z, w) = \begin{cases} 1 - w & (z = 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \tag{8}$$

$$u_2 = u_3 = u_4 = 0 \tag{9}$$

2.4 数値解析法

支配方程式は MAC 法により圧力ポアソン方程式を導いて解く．数値計算のための離散化については差分法を用いる．移流項は 3 次精度上流差分，その他の空間微分は 2 次精度中心差分を適用し，オイラー陽解法により時間積分を行う．また，直交等間隔格子を用い，格子分割数は 64 × 64 × 64 × 64 とした．

1: 日大理工・院 (前)・数学　2: 日大理工・教員・数学

3. 4 次元流れ場の可視化

透視投影 (遠近法) により 3 次元空間を 2 次元投影面に投影変換するときと同様に，透視投影により，4 次元空間を 3 次元投影空間に投影変換し，さらにそれを 2 次元投影面に投影変換する．以上の投影変換によって 4 次元の流れ場が 2 次元投影面上に映し出されることになる．

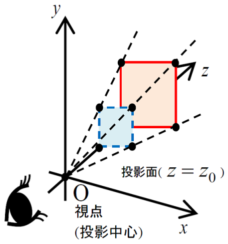


Figure 3. Perspective projection on a 2-D plane.

2 次元空間 への透視投影

$$x' = \frac{z_0}{z}x, y' = \frac{z_0}{z}y, z' = z_0 \quad (10)$$

3 次元空間 への透視投影

$$x' = \frac{w_0}{w}x, y' = \frac{w_0}{w}y, z' = \frac{w_0}{w}z, w' = w_0 \quad (11)$$

4. 可視化結果と考察

Figure 4.(a) は 3 次元流れの計算結果を可視化したものであり，**Figure 2.**(a) で示された $w = 0$ における境界条件を用いている．3 次元流れであるため w 軸方向の流れはない．**Figure 4.**(b)(c)(d) には，4 次元超立方体内部を流れる流れ場の可視化を示す．いずれも流れ場は十分時間が経った後の定常状態を示している．

可視化しているのは，**Figure 4.**(a) では流線，(b)(c)(d) は流管であり，流線，流管ともに，速度ベクトルを繋げた線である．特に，流管は一続きの流管においてその任意の断面を単位時間あたりに通過する流量が等しい．すなわち，流れの方向を示す流線が，速度が大きいほど細くなる管で表現されたものである．**Figure 4.**(b)(c)(d) は w 座標によって色を変化させている．色の変化は，右下のカラーバーに従い，上方ほど w が大きいことを示している．なお，可視化画像は 3 次元レイトレーシングソフトウェア POV-Ray を用いて作成した．

Figure 4.(b)(c) の透視投影の投影方向は w 軸の正の方向にとり，その結果 3 次元投影空間では w 方向は原点から離れる方向となる．(c) は (b) で可視化している流管のうち $y = 0.1$ 付近から出発したものを可視化している．**Figure 4.**(d) は (c) の xw 平面を少し回転させたもので，その結果，原点から離れる方向が x 方向となっている．各図には計算領域を表すフレームと座標軸 (x 軸：赤，y 軸：緑，z 軸：青，w 軸：白) の投影図を付している．フレームは前述の通り w 座標で色付けしている．なお，**Figure 4.**(b)(c)(d) は y 軸方向のみ 2 倍に引き伸ばして表示している．

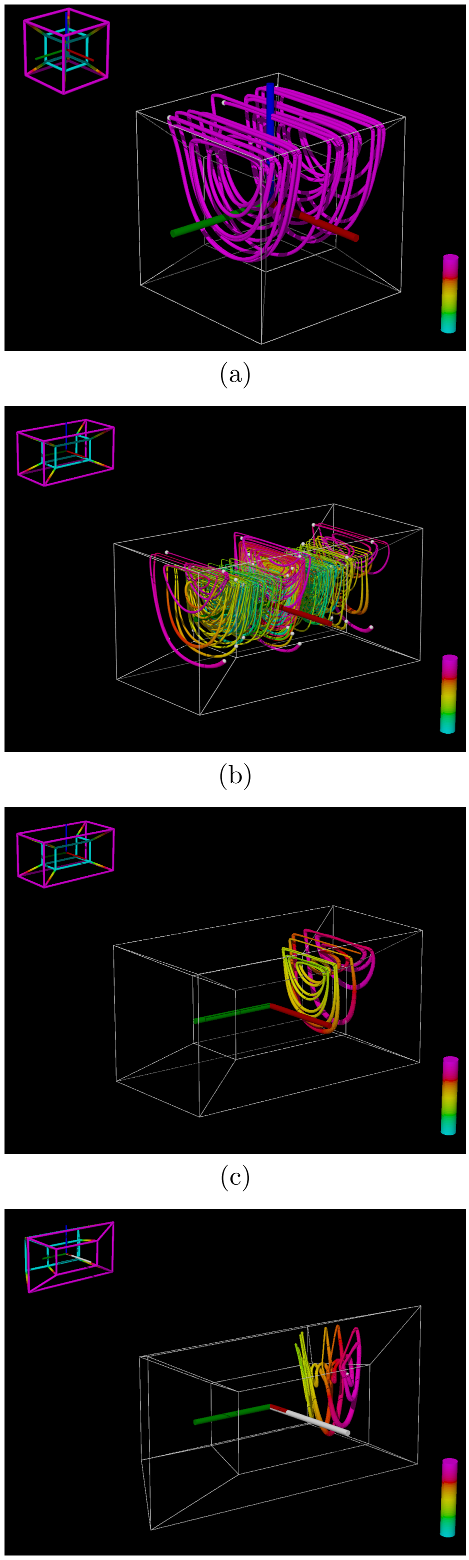
Figure 4.(b)(c)(d) により，回転流の中心で，回転の弱い $y = 0, 1$ および $w = 1$ の境界から，回転の強い $y = 0.5$ および $w = 0$ の境界に向かう流れが生じていることが分かる．

5. まとめ

4 次元超立方体内部の流れの数値シミュレーションを行い，4 次元流れ場の可視化を試みた．可視化を工夫することで，流れ場の様子をある程度捉えることができた．

6. 参考文献

[1] 桑原邦郎，河村哲也：流体計算と差分法，朝倉書店 (2005).
[2] 鈴木広隆，倉田和夫，佐藤尚：POV-Ray による 3 次元 CG 制作—モデリングからアニメーションまで—，CG-ARTS 協会 (2008).
[3] 根上生也：四次元が見えるようになる本，日本評論社 (2012).
[4] Suzuki, E. et al.: Energy transfer and intermittency in four-dimensional turbulence, Phys. Fluids 17, 081702 (2005).
[5] Gotoh, T. et al.: Statistical properties of four-dimensional turbulence, Phys. Rev. E 75, 016310 (2007).
[6] 奥田樹, 松浦昭洋：部分空間の関連性を利用した四次元空間の動的可視化ソフトウェア，可視化情報，Vol.29，No.1 (2009) pp.279-284.



(a)

(b)

(c)

(d)

Figure 4. Visualization of 4-D flow field.