

最小位相状態を用いた非最小位相系の制御系設計

Controller Design for Non-minimum Phase Systems Using Minimum Phase State

○瀧川智貴¹, 内山賢治², 増田開²*Tomoki Takigawa¹, Kenji Uchiyama², Kai Masuda²

This paper proposes a design method of the controller for a non-minimum phase system that has one or more zeros in the right-half plane. The inverse response caused by the unstable zero deteriorates the tracking performance of the controlled system. The non-minimum phase transfer function can be expressed by the product of a minimum phase and all pass transfer functions. The controller is designed to eliminate the undershoot at the transient response of the system by using the minimum phase state that is the output of the minimum phase transfer function. The effectiveness of the proposed control method is verified numerically for the longitudinal motion of an aircraft.

1. 緒言

ロケットや航空機の制御対象は、不安定零点を持つことが知られており^{[1][2]}, そのため逆応答に起因した事故等が報告されている. このようなシステムは非最小位相系と呼ばれ, 極配置を目的とした従来の閉ループ系では, 逆応答を改善することは容易ではない. 逆応答の改善方法として, 極零相殺と並列フィードフォワード補償器が挙げられる. 極零相殺では, 直列補償器によりシステムの持つ不安定零点を相殺するため, システムの内部安定は保証されず, モデル化誤差に対するロバスト性はない. 一方, システムに対して並列に補償器を配置し, システムの構造的性質を失うことなく不安定零点を左半平面に移動する方法が提案されている. この方法では, 閉ループ系の出力を最小位相化し逆応答を起こさないことはできるが, 制御対象の出力は逆応答となると, 根本的な問題の解決には至らない.

そこで本研究では, 最小位相状態に基づいた制御手法を提案し, 逆応答の改善を試みる. 提案手法では, 制御対象の伝達関数を最小位相関数と全域通過関数に分解し^{[3][4]}, 最小位相関数の出力である最小位相状態を用いた制御器を設計する. ただし, 最小位相状態は, センサ等で計測することはできないため, 本稿では, 最小位相状態観測器の設計についても言及する. 最後に, 数値シミュレーションにより, 提案手法の有効性を検証する.

2. 最小位相状態に基づく制御

2.1 最小位相状態推定

本稿では, 1 入力 1 出力系の例として航空機の縦運動を取り扱う. その伝達関数は次式で表せる.

$$\frac{\gamma}{\delta_e} = G(s) = K \frac{(Ts + 1)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega_n^2} \quad (1)$$

ここで, γ は飛行経路角, δ_e はエレベータ舵角, K と T は任意の係数, ζ は減衰比, ω_n は無減衰固有角周波数を表す. ただし, $T < 0$ とする. 式(1)はプロパかつ有理関数で表された既約な伝達関数とする. これより, 伝達関数 $G(s)$ を次式のように分解する^[4].

$$G(s) = G_m(s) \cdot G_a(s) \quad (2)$$

添え字 m と a は, それぞれ最小位相系及び全域通過を示す. なお, $G_m(s)$ は厳密にプロパな最小位相関数とし, 分母はモニックな多項式とする. また, $G_a(s)$ は全域通過関数で定数項 1 の同次有理多項式とする. さらに, $G_a(s)$ の分子多項式と $G_m(s)$ の分母多項式は既約とすると, 式(1)と式(2)から次式を得られる.

$$G_m(s) = K \frac{(-Ts + 1)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega_n^2} \quad (3)$$

$$G_a(s) = \frac{Ts + 1}{-Ts + 1} \quad (4)$$

$G_m(s)$ は不安定零点を持たないので, $G_m(s)$ の関係から得られる最小位相状態を用いて, これから制御系を設計する. ただし, 実システムへの実装化可能な量は, センサ等で計測可能な $G_a(s)$ の出力のみであるため, 最小位相状態はオブザーバにより推定する. まず, 古典制御理論と現代制御理論の一意性を考慮すると, 次式のように, $G_m(s)$ 及び $G_a(s)$ は構築される. なお, 状態方程式は最小実現されたものとする.

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m u \quad (5)$$

$$y_m = \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a y_m \quad (7)$$

$$y_a = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a y_m \quad (8)$$

$\mathbf{x}_m = [\mathbf{x}_m \quad \dot{\mathbf{x}}_m]^T$ は最小位相状態量を示し, $\mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

1: 日大理工・院 (前)・航宇 2: 日大理工・教員・航宇

はシステム行列, $\mathbf{B}_m \in R^2$ は入力行列, $\mathbf{C}_m \in R^2$ は出力行列を示す. 変数 x_a , y_a , 及び係数 A_a , B_a , C_a , D_a は全てスカラー量である.

ここで, 最小位相状態観測器を設計するにあたり, 次式に定義する拡張システムを用いる.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (9)$$

$$y_a = C_a x_a + D_a y_m = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{B}_a \mathbf{C}_m & A_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [D_a \mathbf{C}_m \quad C_a]$$

$\mathbf{A} \in R^{3 \times 3}$ は拡張システムにおけるシステム行列, $\mathbf{B} \in R^3$ は入力行列, $\mathbf{C} \in R^3$ は出力行列を示す. 上式において, システム (\mathbf{A}, \mathbf{C}) は可観測なので, オブザーバは以下のように設計できる.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}(y_a - \hat{y}_a) \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{B}_a \mathbf{C}_m & A_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

ここで, $\hat{\mathbf{x}}$ 及び \hat{y}_a は推定量, \mathbf{C} は拡張システムにおける出力行列, \mathbf{G} はオブザーバゲインを表す.

2.2 併合システム

本節では, 最小位相状態を用いた逆応答の改善方法を説明する. まず, 式(10)で表した制御対象の出力 y_a を微分し, さらに y_a の微分を式(14)で表せるものとする.

$$\begin{aligned} \dot{y}_a &= C_a \dot{x}_a + D_a \dot{y}_m \\ &= C_a (A_a x_a + B_a y_m) + D_a C_m \dot{x}_m \\ &= (C_a B_a C_m + D_a C_m A_m) x_m + C_a A_a x_a \\ &\quad + D_a C_m B_m u \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{y}_a = -(\alpha y_a + \beta Tr) - \beta \int_0^t (y_a - r) dt \quad (14)$$

ここで, r は y_a の一定目標値, α と β は任意の定数である. 式(14)から次式の微分方程式が得られる.

$$\dot{y}_a + \alpha \dot{y}_a + \beta y_a = -\beta Tr + \beta r \quad (15)$$

式(13)と式(14)より, 制御入力 u は, 最小位相状態及び y_a の推定量を用いて, 以下のように導出される.

$$u = - \left(\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + k_a \hat{y}_a + k_I \left(Tr + \int_0^t (\hat{y}_a - r) dt \right) \right) \quad (16)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{(D_a C_m A_m + C_a B_a C_m)}{D_a C_m B_m} & \frac{C_a A_a}{D_a C_m B_m} \end{bmatrix}$$

$$k_a = \frac{\alpha}{D_a C_m B_m}, k_I = \frac{\beta}{D_a C_m B_m}$$

式(16)のように, 最小位相状態を用いた制御入力により, 式(15)に示す y_a を実現することができる. すなわち, システムから不安定零点を消去し, 逆応答の改善が可能となる. さらに, 係数 α と β により出力応答の収束性や速応性を調整することが可能なことも分かる.

3. 数値シミュレーション

数値シミュレーションでは, 式(1)に示す航空機の縦運動に対して提案手法を適用し, $T = -1$, $K = 1.0$, $\zeta = 0.4$, $\omega_n = 1.5$, 及び $\alpha = 2$, $\beta = 1$ とする. Figure 1に最小位相状態の推定誤差の時間履歴の結果を示す. Figure 1より, 推定値は速やかに真値に収束しており, 推定誤差が制御性能に与える影響は小さいと考えられる. Figure 2に y_a の時間応答を示す. 最小位相状態に基づいた制御を用いた結果, 非最小位相系の特徴である逆応答が, 図から改善されていることが分かる.

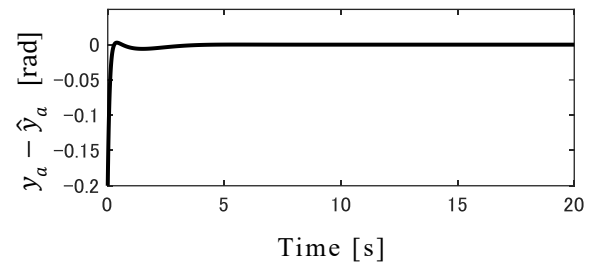


Figure 1. Time response of estimation error of output y_a

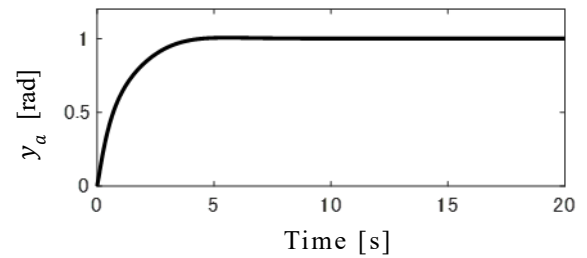


Figure 2. Time response y_a of controlled system

4. 結言

非最小位相系に対し, 最小位相状態を用いた新たな制御手法を提案し, 数値シミュレーションにより提案手法の有効性を検証した. 今後は, 多入力多出力系に対する設計法を検討する.

5. 参考文献

- [1] 須田信英: 制御系における零点 [I] 極と零点の定義, 計測と制御, Vol.20, No.2, 1990, pp.47-55.
- [2] 岡島寛: 不安定零点と制御, システム/制御/情報, Vol.64, No.9, 2020年, pp.19-24.
- [3] John Bechhoefer: Kramers - Kronig, Bode, and the meaning of zero, American Journal of Physics, Vol.79, No.10, pp.1053-1059.
- [4] 都丸隆夫: 最小位相状態に基づく線形制御系設計, 東京図書出版, 2016年, pp.11-18.