L-13

シンプレクティック数値積分法を用いた電磁界計算における数値分散誤差の検討
−FDTD 法との比較−

Numerical Dispersion Errors in Electromagnetic Field Computations by Symplectic Integrator Method.
- Comparison with FDTD Method -

○宮本浩志郎[1]，岸本誠也[2]，佐甲徳栄[3]，大貫進一郎[2]
*Koshiro Miyamoto[1], Seiya Kishimoto[2], Tokuei Sako[3], Shinichiro Ohnuki[2]

Abstract: The symplectic integrator (SI) method is known as a stable and reliable numerical method. We have applied this method to the time-dependent Maxwell's equations to achieve stable electromagnetic field analysis over long computation times. In this report, a numerical dispersion relation is theoretically derived. The validity of the SI method for electromagnetic field analysis is examined by comparing with the explicit finite-difference time-domain (FDTD) method.

数値電磁界解析法として広く用いられている FDTD（Finite-Difference Time-Domain）法では数値分散誤差が空間刻み幅と時間刻み幅の大きさに依存し，多ステップで電磁界解析を行う際の精度に大きな影響を及ぼす．著者らはこれまでに，安定した数値解析法として知られるシンプレクティック数値積分（SI: Symplectic Integrator）法[1]を電磁界解析に適用し，エネルギー安定性について検討を行った[2]．また，計算過程においてフーリエ変換を用いて電磁界を波数空間に変換することで，計算精度が空間刻み幅に依らないことを確認した．

本報告では，SI 法の計算精度を理論的に評価するために数値分散関係式を更新式から導出する．また，FDTD 法での数値分散誤差と比較し SI 法の有用性を検討する．導出には，Maxwell 方程式を SI 形式で表した以下の式を用いる．

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{E}}^{n+1}(\boldsymbol{r})\\ \widetilde{\boldsymbol{H}}^{n+1}(\boldsymbol{r})\end{pmatrix}=e^{\Delta t'\begin{pmatrix}0 & \left(1/\sqrt{\varepsilon_r(\boldsymbol{r})}\right)\nabla\times\left(1/\sqrt{\mu_r(\boldsymbol{r})}\right)\\ -\left(1/\sqrt{\mu_r(\boldsymbol{r})}\right)\nabla\times\left(1/\sqrt{\varepsilon_r(\boldsymbol{r})}\right) & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{E}}^{n}(\boldsymbol{r})\\ \widetilde{\boldsymbol{H}}^{n}(\boldsymbol{r})\end{pmatrix} \tag{1}$$

ここで，電界 $\boldsymbol{E}$，磁界 $\boldsymbol{H}$，$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0/\mu_0}\,\boldsymbol{E}$，$\widetilde{\boldsymbol{H}}=\sqrt{\mu_r}\boldsymbol{H}$ であり，ε_0，μ_0は真空の誘電率と透磁率，ε_r，μ_rは比誘電率と比透磁率，$t'=c_0t$，c_0は真空中の光速度，nは時間ステップ数である．右辺の行列指数関数を行列計算に近似し，空間微分はフーリエ変換を用いて電磁界を波数空間に変換し虚数iと波数kの積に置き換える．そして，電磁界を単一波長の波として代入し整理することで数値分散関係式が求まる．以下に 1 次元問題における SI 法の数値分散関係式を示す．

$$\frac{1}{(c_0\Delta t)^2}\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)=\frac{k^2}{4} \tag{2}$$

ここで，ωは角周波数（$\omega=2\pi\lambda/c_0$），kは波数，λは波長である．この式から SI 法では，数値分散が空間刻み幅に依存しないことが分かる．また，図 1 に時間刻み幅に対する数値分散誤差を示す．時間刻み幅を小さくすることで数値分散誤差が小さくなることを確認できる．以上より，SI 法での数値分散誤差は空間刻み幅に依存せず，時間刻み幅に依存する．この結果を FDTD 法の数値分散誤差と比較し SI 法の有用性について検討を行う．

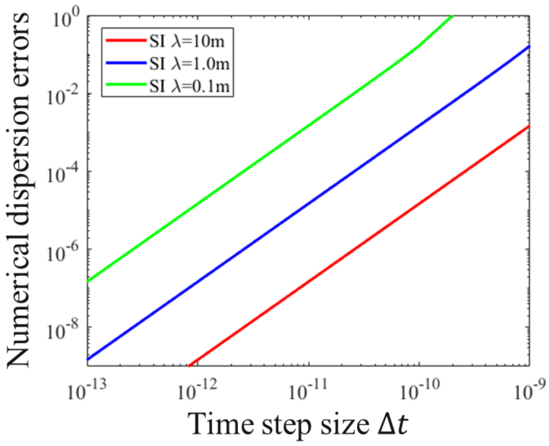

Figure1. SI 法における数値分散誤差

謝辞
本研究の一部は，JSPS 科研費 JP21K17753 及び JP23K03961 の援助を受けて行われた．

参考文献

[1] H. Yoshida, “Construction of higher order symplectic integrators”, Physics Letters A, Vol. 150, No. 5,6,7, pp. 262-268, 1990
[2] 宮本浩志郎，岸本誠也，佐甲徳栄，大貫進一郎 :「シンプレクティック数値積分法を用いた電磁エネルギーの計算」，2023 年電子情報通信学会ソサイエティ大会，C-1-11，2023 年 9 月

1：日大理工・院（前）・電気　2：日大理工・教員・電気　3：日大理工・教員・一般