O-11

AdS_3/CFT_2対応における漸近的対称性に関する最近の進展

Recent progress in studies on asymptotic symmetries of the AdS_3/CFT_2 correspondence

○小橋弘聖[1]，　三輪光嗣[2]
Hirotoshi Kobashi[1], Akitsugu Miwa[2]

Abstract: In this talk, we review recent progress in studies on AdS_3/CFT_2 correspondence based on [1]. The AdS spacetime has the same number of symmetries as the CFT on its boundary. 2-dimensional (2D) CFTs have an infinite dimensional conformal symmetry and that corresponds to the asymptotic symmetry of 3D AdS spacetime. In [1] 4D Minkowski spacetime is considered as a foliation by Euclidean AdS_3 and the asymptotic symmetry is discussed.

１．導入

反・ドジッター時空（AdS時空）とは、負の宇宙定数をもつ Einstein 方程式の解である。AdS/CFT対応は、Maldacena によって提唱されたAdS時空の重力理論とこの時空の境界に置かれた共形場理論（CFT）が等価であるという主張である。

今回の発表は参考文献[1]およびこれと関連する研究についてレビューすることを目的としている。[1]では、3次元AdS時空と2次元CFTの間の対応であるAdS_3/CFT_2対応と漸近的平坦な4次元時空における量子重力理論との関連性が議論されている。そこで重要になる概念として漸近的対称性が挙げられる。漸近的対称性とは、無限遠での計量が持つ近似的な不変性のことである。[1]では3次元AdS時空を4次元の Minkowski 時空に埋め込むことで両者の漸近的対称性の関連が議論されている。以下ではAdS時空やCFTが持つ対称性、時空の無限遠方におけるチャージの扱いについて述べる。

２．d次元AdS時空の対称性とCFT

AdS時空のもつ対称性の個数と境界の共形対称性の個数は同じになる。AdS時空は1次元高い空間に埋め込んで考えることがある。d次元のAdS時空の場合、$d+1$次元の空間に埋め込む。このとき$d+1$次元空間の計量は

$$ds^2=-dX_0^2+dX_1^2+\cdots+dX_{d-1}^2-dX_d^2$$

である。この中でAdS時空は

$$-X_0^2+X_1^2+\cdots+X_{d-1}^2-X_d^2=-L^2$$

という超曲面で表される。ただし、LはAdS時空の曲率半径である。このときAdS時空のもつ対称性は埋め込み先の$d+1$次元空間における回転と Lorentz 変換に対応し、合わせて${}_{d+1}C_2$個である。一方で$d-1$次元の境界における共形対称性は、並進$d-1$個、回転・Lorentz 変換${}_{d-1}C_2$個、スケール変換1個、特殊共形変換$d-1$個を合わせて${}_{d+1}C_2$個あり、d次元のAdS時空のもつ対称性の個数と一致する。対称性の対応は計量が以下のように与えられるポアンカレ座標で考えると分かりやすい。

$$ds^2=L^2\frac{dz^2-dx^{0^2}+dx^{1^2}+\cdots+dx^{d-2^2}}{z^2}$$

境界は$z=0$に存在し、CFTは以下の計量をもつ平坦時空上で定義される。

$$ds_{CFT}^2=-dx^{0^2}+dx^{1^2}+\cdots+dx^{d-2^2}$$

この座標系ではAdS時空の対称性は$\{x^i\}$方向の回転・ローレンツ変換および並進を合わせて ${}_dC_2$個、スケール変換$(x^i,z)\to(bx^i,bz)$ が１個、さらに次式で与えられる対称性がベクトルc^iの任意性に応じて$d-1$個存在する。

$$x'^i=\frac{x^i+c^i(x^2+z^2)}{1+2c\cdot x+c^2(x^2+z^2)}$$

$$z'=\frac{z}{1+2c\cdot x+c^2(x^2+z^2)}$$

これらの対称性を$z=0$に制限することでCFTが定義された$d-1$次元における共形対称性が得られる。

３．AdS_3/CFT_2対応における対称性

AdS_3/CFT_2の場合、境界のCFT_2での共形対称性の次元が無限次元に拡張される。このことは2次元 Minkowski 時空の計量を以下のように取ると容易に理解できる。

$$ds^2=-dx_+dx_-$$

ここで座標変換として

$$x_+\to X_+(x_+)\qquad x_-\to X_-(x_-)$$

を考えると、この変換は計量が局所的にスケール倍される共形変換になっていることが分かる。

$$ds^2=-dX_+dX_-=-\frac{\partial X_+}{\partial x_+}\frac{\partial X_-}{\partial x_-}dx_+dx_-$$

ここで$X_+(x_+)$ も$X_-(x_-)$もそれぞれ任意関数であるた

１：日大理工・院（前）・物理　　２：日大理工・教員・物理

め、共形対称性が無限次元になる。

AdS_3時空は厳密な対称性としてはこれに対応する無限次元の対称性は持っていないが、漸近的な対称性として無限次元の対称性をもつ。例えば[2]ではAdS_3時空の計量を以下のように取って議論をしている。

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2}dr^2 - r^2 dx^+ dx^-$$

この計量に対して以下の座標変換を施す。

$$\delta x^\pm = -\xi^\pm - \frac{L^2}{2r^2}\partial_\mp^2 \xi^\mp, \quad \delta r = \frac{r}{2}(\partial_+\xi^+ + \partial_-\xi^-)$$

すると、計量の変化は以下のずれのみであり、漸近的対称性と解釈される。

$$\delta(ds^2) = -\frac{L^2}{2}(\partial_+^3\xi^+)(dx^+)^2 - \frac{L^2}{2}(\partial_-^3\xi^-)(dx^-)^2$$

この対称性は2次元の境界($r=\infty$)では前述の無限次元共形対称性を表す。

４．AdS_3/CFT_2対応の4次元への埋め込み[1]

4次元 Minkowski 時空は、双曲断面による切断が可能で、このとき一つ一つの断面は Euclidean AdS_3空間である。座標は$(\tau, \rho, z, \bar{z})$であり、計量を

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -d\tau^2 + \tau^2\left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + \rho^2 dz d\bar{z}\right)$$

ととる。

論文[1]では Euclidean AdS_3空間の漸近的対称性を 4 次元の視点から考察している。この場合の漸近的対称性は以下のベクトル場によって与えられる。

$$\zeta_Y = Y^z\partial_z - \frac{1}{2}\partial_z Y^z \rho\partial_\rho - \frac{1}{2\rho^2}\partial_z^2 Y^z \partial_{\bar{z}}$$

ベクトル場ζ_Yの下で、4次元 Minkowski 時空の計量は

$$\mathcal{L}_Y g_{zz} = -\frac{\tau^2}{2}\partial_z^3 Y^z$$

だけ変化し、そのほかの成分は変化しない。このため、この変換は 4 次元における漸近的対称性として解釈される。論文[1]ではこうした変換のチャージを$\tau\to\infty$、$\rho\to\infty$の境界上で定義している。重力理論ではこのように境界においてチャージを定義する方法はしばしば用いられる。次節では[1]でも引用されている文献[3]の議論を紹介する。

５．対称性と Noether チャージ

ここでは Noether チャージについて文献[3]の議論を紹介する。(文献[4]も参考にしている。)d次元の多様体$\mathcal{M}$を考える。ラグランジアン密度$\mathcal{L}$を$\sqrt{-g}$を含むスカラー密度とし、計量と物質場をまとめて$\boldsymbol{\phi}$とする。最小作用の原理から運動方程式を導くことができる。この導出途中で出てくる全微分項を$\partial_\mu\Theta^\mu(\phi,\delta\phi)$とし、理論が対称性を持つためにベクトル場$\xi$に沿ったラグランジアン密度の変化分$\delta_\xi\mathcal{L}$も全微分$\partial_\mu X_\xi^\mu$でかけるとする。すると Noether カレント$J^\mu$を

$$J^\mu = \Theta^\mu(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - X_\xi^\mu$$

と定義できる。この Noether カレントの発散は、運動方程式が成り立つときに 0 となる($\partial_\mu J^\mu = 0$)。したがって反対称テンソル$Q^{\mu\nu}$と場の運動方程式によって消えるテンソル$C^\mu{}_\nu$を用いて

$$J^\mu = \partial_\nu Q^{\mu\nu} + C^\mu{}_\nu\xi^\nu$$

と書くことができる。Einstein-Hilbert 作用のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{\sqrt{-g}R}{16\pi G}$$

を考えている場合は

$$Q^{[\mu\nu]} = \frac{1}{8\pi G}\sqrt{-g}\nabla^{[\nu}\xi^{\mu]}$$

$$C^\mu{}_\nu = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}\left(R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}R\delta^{\delta\mu}{}_\nu\right)$$

となる。ここでベクトル場ξに沿ったラグランジアン密度の変化分$\delta_\xi\mathcal{L}$が$\delta_\xi\mathcal{L} = \partial_\mu(\xi^\mu\mathcal{L})$と書けることより、$X_\xi^\mu = \xi^\mu\mathcal{L}$となるので、結局のところ Noether カレントJ^μは

$$J^\mu = \Theta^\mu(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi^\mu\mathcal{L}$$

となる。

これらの事情を微分形式で表現すると Noether カレント$\boldsymbol{J}[\xi]$は

$$\boldsymbol{J}[\xi] = \boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi\cdot\boldsymbol{L}$$

である。d次元理論の場合 Noether カレント$\boldsymbol{J}[\xi]$は、$(d-1)$形式である。また

$$d\boldsymbol{J} = 0$$

より

$$\boldsymbol{J} = d\boldsymbol{Q}$$

となる Noether チャージ$(n-2)$形式$\boldsymbol{Q}$が存在する。

参考文献

[1]A.Ball, E.Himwich, S.Narayanan, S.Pasterski, and A.Strominger, JHEP08 (2019) 168.
[2]V.Balasubramanian and P.Kraus,Commun.Math.Phys.208 (1999) 413.
[3]V.Iyer and R.M.Wald,Phys.Rev.D 52 (1995) 4430.
[4]福間将文・酒谷雄峰,『重力とエントロピー　重力の熱力学的性質を理解するために』,サイエンス社,SGC ライブラリ 112,　臨時別冊・数理科学 2014 年 10 月.