O-12

D ブレーン背景におけるスケール不変性と AdS/CFT 対応

Scale invariance in D-brane background and AdS/CFT correspondence

○高橋裕希 [1], 三輪光嗣 [2]
*Hiroki Takahashi[1], Akitsugu Miwa[2]

Abstract: We review [1] and [2]. In a D-brane background spacetime, there exists a scale invariance under an anisotropic scale transformation. Transformation properties of boundaries of a worldsheet and the free energy of a string in the case of N D3-branes are studied in [1]. In [2], they consider D p-branes for background and generalized the results of [1] for $p \neq 3$.

１．はじめに

ゲージ理論と重力理論の間の双対性，いわゆる AdS/CFT 対応が提案されてから様々な具体例や応用が研究されてきた．典型的な例として，$AdS_5 \times S^5$ における IIB 型超重力理論と４次元の $\mathcal{N} = 4$ 超対称ヤン・ミルズ（SYM）理論の双対関係があるが，このような対応がどの範囲で，またどのようにして起こるのかは未解明である．

[1] では，非等方的なスケール変換

$$x^\mu \to c x^\mu,\ \ y^I \to c^{-1} y^I, \tag{1}$$

に対する IIB 型超重力理論の解および境界状態 $|B\rangle$ の不変性，$X^i, P^i, \alpha^i_n, S^a_n$ などの変換性を用いて弦の自由エネルギーのスケール変換性を調べ，これが D3 ブレーンの近傍の領域でスケール不変であることが示されている．ここで x は D ブレーンの伸びている方向，y は D ブレーンの局在している方向の座標である．尚この先単にスケール変換といった場合は [1] にならい（1）のことを指すものとする．

２．D3 ブレーン背景時空計量のスケール不変性

N 枚の D3 ブレーンが存在する場合の IIB 超重力理論の解は

$$ds^2 = \left(1 + \frac{4\pi\lambda}{y^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(1 + \frac{4\pi\lambda}{y^4}\right)^{\frac{1}{2}} dy^I dy^I, \tag{2}$$

である．ここで $\lambda = g_s N$，g_s は弦の結合定数である．この解は $y^4 \ll \lambda$ となる領域（near-horizon region と呼ぶ）において変換（1）の下で不変である．[1] においては，スケール変換をすることで，図 1 に示すように $\mathcal{N} = 4$ SYM の Wilson ループと超重力理論の最小曲面が関連すると主張されている．

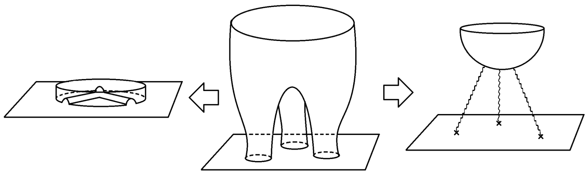

図 1　Images based on [1]. $\mathcal{N} = 4$ SYM (left) and minimal surface of type IIB supergravity (right) are related via the transformation (1).

３．境界状態のスケール不変性と作用の変換

世界面の境界状態を特徴づける方程式は D ブレーンの伸びている方向のガンマ行列の積を $\beta^\perp$ として

$$(Q + \beta^\perp \tilde{Q})_\alpha |B\rangle = 0, \tag{3}$$

と書ける（詳細は [3]）．[1] では $\beta^\perp = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ として議論されている．以降保存する超電荷を $(Q + \beta^\perp \tilde{Q})_\alpha = \mathcal{Q}_\alpha$ のように書く．ここで，

$$|B\rangle = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} M^{ij} \alpha^i_{-n} \tilde{\alpha}^j_{-n} - i M^{ab} S^a_{-n} \tilde{S}^b_{-n}\right)\right] |B_0\rangle, \tag{4}$$

$|B_0\rangle$ は境界条件を満たす各モードの基底状態の直積であり，M^{ab}, M^{ij} はそれぞれ

$$M^{ab} = (\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4)^{ab},\ M^{ij} = \begin{bmatrix} -I_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

1：日大理工・院（前）・物理　2：日大理工・教員・物理

のように定義されている．[1] では，世界面上でのスケール変換を正準変換として実現している．

$$\delta_\epsilon X^i(\sigma) = \epsilon M^{ij} X^j(\sigma),\ \delta_\epsilon P^i(\sigma) = -\epsilon M^{ij} P^j(\sigma). \tag{6}$$

X^i, P^i の $\tau = 0$ におけるモード展開および Q と S^a_n, $\tilde{S}^a_n$ の関係，Q と $\alpha^i_n, \tilde{\alpha}^i_n$ の交換関係など（詳しくは [4] を参照）から

$$\delta_\epsilon \alpha^i_n = -\epsilon M^{ij} \tilde{\alpha}^j_{-n},\ \delta_\epsilon \tilde{\alpha}^i_n = -\epsilon M^{ij} \alpha^j_{-n}, \tag{7}$$

$$\delta_\epsilon S^a_n = i\epsilon M^{ab} \tilde{S}^b_{-n},\ \delta_\epsilon \tilde{S}^a_n = -i\epsilon M^{ab} S^b_{-n}, \tag{8}$$

が導かれ，これによって境界状態 $|B\rangle$ のスケール不変性が示されている．また光円錐ゲージにおける IIB 型超弦理論の作用

$$S = -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma \left[\frac{1}{2}\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^i - iS^a\partial_- S^a - i\tilde{S}^a \partial_+ \tilde{S}^a\right] \tag{9}$$

の変換性は以下のようになる．

$$\delta_\epsilon S = \frac{\epsilon}{\pi}\int d^2\sigma[-M^{ij}\partial_\alpha X^i \partial^\alpha X^j + M^{ab} S^a \partial_\sigma \tilde{S}^b]. \tag{10}$$

４．自由エネルギーの変換性

[1] において，自由エネルギーは以下のように定義されている．

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{n!}\lambda^n \tag{11}$$

ここで，F_n は n 個の境界を持つ世界面の寄与である．$F(\lambda)$ の変換性は各 F_n の変換性によって決まり，$\delta_\epsilon S$ が $|B_0\rangle$ の挿入に置き換えられるという考察から，微小スケール変換による自由エネルギーの変化は

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon F(\lambda) &\sim \epsilon y^4 C(\lambda, y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} F_{n+1} \\ &= \epsilon y^4 C(\lambda, y)\partial_\lambda F(\lambda)\end{aligned} \tag{12}$$

のようになると推定している．つまり，自由エネルギーは

$$F(\lambda) \to F(\lambda + \epsilon y^4 C(\lambda, y)) \tag{13}$$

と変換され，near-horizon region において $F(\lambda)$ が不変であるということが示唆される．

５．Dp ブレーンへの拡張

[2] では，[1] の結果を一般の Dp ブレーンの場合に拡張している．計量はホライゾンの半径 U_0 を用いて以下のように書ける．

$$\begin{aligned} ds^2 =& \left(\frac{U^{7-p}}{d_p\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(1-\left(\frac{U_0}{U}\right)^{7-p}\right)dx^2_{p+1} + \sum_{a=1}^{p} dx^2_a\right] \\ &+ \left(\frac{d_p\lambda}{U^{7-p}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{dU^2}{1-(\frac{U_0}{U})^{7-p}} + U^2 d\Omega^2_{8-p}\right] \end{aligned} \tag{14}$$

ただし d_p は p によって定まる定数である．これは以下の一般化されたスケール変換

$$x_A \to c^{-1}x_A,\ U \to cU,\ \lambda \to c^{3-p}\lambda \tag{15}$$

の下で不変である．$X^i, P^i\alpha^i_n, S^a_n$ などについては [1] と同様の変換性が成り立つ．自由エネルギーについては [1] と多少異なった取り扱いがなされているが，結果としては near-horizon region において変化が無視できるという結論が得られている．

６．まとめ

AdS/CFT 対応がどのように生ずるのかを，スケール変換に対する変換性の観点から調べた [1] および，それを拡張した [2] の内容について調べ，レビューした．今後もさらに AdS/CFT 対応が発生する原理やゲージ理論と重力理論の関係について調べ，考察していきたい．

参考文献

[1]H. Kawai, T. Suyama : "AdS/CFT correspondence as a consequence of scale invariance", Nucl. Phys. B, Vol.789, 209-224, 2008.

[2]T. Azeyanagi, M. Hanada, H. Kawai, Y. Matsuo : "Worldsheet analysis of gauge/gravity dualities", Nucl. Phys. B, Vol. 816, 278-292, 2009.

[3] 太田信義：「超弦理論・ブレイン・M 理論」，丸善出版，２０１２．

[4]M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten : "Superstring Theory", Cambridge University Press, 1987.