O-14

Polchinski 方程式に対する無固定点定理
No-fixed-point theorem for the Polchinski equation

○田中太一[1]，　大谷聡[2]
*Taichi Tanaka[1], Satoshi Ohya[2]

Abstract : It is known that the Polchinski equation—the infinitesimal form of coarse-graining procedure in Wilson's renormalization group transformation—has no nontrivial fixed points. To the best of our knowledge, however, there is no proof for this in the existing literature. In this talk, we give a simple proof for the absence of nontrivial fixed points in Polchinski's formulation of renormalization group.

１．導入

1970 年代に Kenneth G. Wilson が明らかにしたように，連続空間上の場の理論を非摂動論的に構成するほぼ唯一の方法がカットオフ理論（または格子理論）の連続極限である [1]．連続極限とはカットオフ Λ を無限大にする極限（格子理論で言えば格子間隔 a をゼロにする極限）のことであるが，通常の場の理論の摂動計算でよく知っているように，この極限が存在するためにはカットオフ理論のパラメータに適切な Λ 依存性を持たせなければならない．Wilson が明らかにしたのは，繰り込み群変換の固定点とそこから湧き出す renormalized trajectory と呼ばれる繰り込み群のフローの情報を用いれば，カットオフ理論のパラメータに入れるべき Λ 依存性が自動的に分かり，$\Lambda \to \infty$ の連続極限が非摂動論的に構成できるという点である．端的に言うと，繰り込み群変換に非自明な固定点さえあれば，連続空間上の場の理論は非摂動論的に構成できる．

さて，ところで現代では繰り込み群変換とは単に「高運動量モードの積分」であると説明されることが多い．この変換は Joseph Polchinski が 4 次元 ϕ^4 理論の摂動論的繰り込み可能性を証明する際に使ったフロー方程式（いわゆる Polchinski 方程式）が依拠する繰り込み群変換（以下ではこれを Polchinski の繰り込み群変換と呼ぶことにする）であり [2]，元々の Wilson の繰り込み群変換とは異なる．その決定的な違いは，Wilson の繰り込み群変換には非自明な固定点が存在し得るが，Polchinski の繰り込み群変換には非自明な固定点は存在し得ない，という点である．この事実は一部の専門家の間では認識されていたが [3]，我々の知る限り，その証明はこれまで与えられてこなかった．本研究では Polchinski の繰り込み群変換には非自明な固定点は存在しないことを非摂動論的に証明する．まずはフロー方程式の一般論から始めよう．

２．繰り込み群のフロー方程式

一般に，繰り込み群とは繰り込み群変換と呼ばれる理論空間 $\mathcal{S}$ に作用する 1 径数族の変換 $\{\mathsf{R}_t\}_{t\geq 0}$ の成す半群のことである．ここで理論空間とは（Euclid 空間上で定義された）カットオフ Λ の場の理論の作用汎関数 S の集合のことであり，繰り込み群変換とはある作用汎関数 S とそれから出発して構成される別の作用汎函数 S_t とを対応付ける可微分写像 $\mathsf{R}_t : S \mapsto \mathsf{R}_t(S) = S_t$ のことである．ただし，この R_t はなんでも良いわけではなく，分配関数は不変に保つ（すなわち物理は変えない）ものでなければならない．

$$Z(S) = Z(\mathsf{R}_t(S)), \quad \forall t \geq 0 \tag{1}$$

ここで $Z(S)$ は理論 S に対する分配関数で，次の汎関数積分で定義される．

$$Z(S) := \int [d\phi]\, \mathrm{e}^{-S[\phi]} \tag{2}$$

応用上特に重要なのが繰り込み群変換の無限小形で，これは形式的には等式 $S_t = \mathsf{R}_t(S)$ の両辺を t で微分すれば得られる．結果は次の微分方程式になる．

$$\frac{\partial}{\partial t} S_t = \mathsf{G}(S_t) \tag{3}$$

ただし，G は次式で定義される R_t の “生成子” である．

$$\mathsf{G}(S_t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{R}_{\Delta t}(S_t) - S_t}{\Delta t} \tag{4}$$

微分方程式 (3) を繰り込み群のフロー方程式と呼ぶ．この方程式を初期条件 $S_{t=0} = S$ の下で解けば，フロー方程式の解の軌道（繰り込み群のフロー）が得られる．

次に固定点について説明しよう．繰り込み群変換の固定点 S_* とは，任意の $t \geq 0$ に対して $\mathsf{R}_t(S_*) = S_*$ が成り立つ理論のことである．これは生成子を用いると $\mathsf{G}(S_*) = 0$ という条件になる．従って，固定点を見つけるにはフロー方程式 (3) の右辺がゼロになる理論を探せば良い．

以上がフロー方程式の一般論であるが，式 (3) の右辺がどのような形になるかは当然繰り込み群変換 R_t の構成に依存する．例えば元々の Wilson の繰り込み群変換は (i) 高運動量モードの積分，(ii) スケール変換，(iii) 場の再規格化の 3 ステップから成るのに対し，Polchinski の繰り込み群変換は高運動量モードの積分だけの変換であり，従って両者ではフロー方程式も異なる．重要なのは後者の変換には非自明な固定点は無いということなのだが，これを見るために次にスカラー場の理論を用いて Polchinski の繰り込み群変換を定式化しよう．

---

[1] 日大理工・院 (前)・量子　[2] 日大・教員・量科研

３．Polchinski の繰り込み群変換

以下ではカットオフ Λ を持つ D 次元実スカラー場の理論を考える．$\phi(p)$ を実スカラー場の運動量表示とし，次の作用汎関数を考えよう．

$$S[\phi]=\frac{1}{2}\int_p \frac{p^2}{K(\frac{p}{\Lambda})}\phi(p)\phi(-p)+V[\phi] \tag{5}$$

ただし，$\int_p=\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}$ であり，$V[\phi]$ は ϕ の任意の汎関数である．また $K(\frac{p}{\Lambda})$ は $\frac{p^2}{\Lambda^2}$ の可微分非増加関数であり，$\frac{p^2}{\Lambda^2}\leq 1$ で $K(\frac{p}{\Lambda})=1$，$\frac{p^2}{\Lambda^2}>1$ で急激にゼロに収束するものとする．このような K をカットオフ関数と呼ぶ．このカットオフ関数の存在により，Boltzmann 因子 $\mathrm{e}^{-S[\phi]}$ は $p^2>\Lambda^2$ でほぼゼロになり，汎関数積分 (2) には殆ど寄与しないことに注意したい．

次に汎関数積分 (2) のうち，$p^2>\Lambda^2\,\mathrm{e}^{-2t}$（ただし $t>0$）の領域に値を持つ高運動量モードを先に積分してしまうことを考えよう．まず ϕ を次のように分解する．

$$\phi_l(p)=\frac{K(\frac{p}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}{K(\frac{p}{\Lambda})}\phi(p) \tag{6a}$$

$$\phi_h(p)=\frac{K(\frac{p}{\Lambda})-K(\frac{p}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}{K(\frac{p}{\Lambda})}\phi(p) \tag{6b}$$

$\phi(p)=\phi_l(p)+\phi_h(p)$ が成り立つこと，$\phi_l(p)$ は $p^2>\Lambda^2\,\mathrm{e}^{-2t}$ で急激にゼロになること，そして $\phi_h(p)$ は $p^2>\Lambda^2\,\mathrm{e}^{-2t}$ でのみ値を持つことに注意したい．ϕ_l と ϕ_h をそれぞれ低運動量モード，高運動量モードと呼ぶ．この分解を使うと，分配関数 (2) は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned}Z(S)&=\int[d\phi]\,\mathrm{e}^{-S[\phi]}\\&=\int[d\phi_l]\int[d\phi_h]\,\mathrm{e}^{-S[\phi_l+\phi_h]}\\&=\int[d\phi_l]\,\mathrm{e}^{-S_t[\phi_l]}\end{aligned} \tag{7}$$

ただし，S_t は次式で定義される作用汎関数である．

$$\mathrm{e}^{-S_t[\phi_l]}:=\int[d\phi_h]\,\mathrm{e}^{-S[\phi_l+\phi_h]} \tag{8}$$

構成から明らかに $Z(S)=Z(S_t)$ が成り立つ．このようにして S から S_t を構成するのが Polchinski の繰り込み群変換である．この変換を次のように書こう．

$$\mathsf{R}_t^{\mathrm{P}}:S\mapsto \mathsf{R}_t^{\mathrm{P}}(S)=S_t \tag{9}$$

そして，この変換に対するフロー方程式 (3) が Polchinski 方程式である．導出は省略するが，$\mathsf{R}_t^{\mathrm{P}}$ の生成子 G^{P} は次式で与えられることが言える．

$$\begin{aligned}\mathsf{G}^{\mathrm{P}}(S_t)=\int_p\Bigg[&\frac{\Delta(\frac{p}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}{K(\frac{p}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}\phi(p)\frac{\delta S_t[\phi]}{\delta\phi(p)}\\&+\frac{1}{2}\frac{\Delta(\frac{p}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}{p^2}\left(\frac{\delta^2 S_t[\phi]}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)}-\frac{\delta S_t[\phi]}{\delta\phi(-p)}\frac{\delta S_t[\phi]}{\delta\phi(p)}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{10}$$

ただし，$\Delta(\frac{p}{\Lambda}):=\sum_{i=1}^D p_i\frac{\partial}{\partial p_i}K(\frac{p}{\Lambda})$ である．

以上で準備が整った．次に本研究の主題である Polchinski 方程式に対する “無固定点定理” を証明しよう．

４．無固定点定理

式 (9) で定義した Polchinski の繰り込み群変換 $\mathsf{R}_t^{\mathrm{P}}$ には非自明な固定点は存在しない．次の定理が成り立つ．

定理． 繰り込み群変換 $\mathsf{R}_t^{\mathrm{P}}$ の固定点では連結相関関数は全てゼロである．

証明． 作用汎関数 S_t に対する連結相関関数の母関数 W_t を考える．これは次の汎関数積分で定義される．

$$\mathrm{e}^{W_t[J]}:=\int[d\phi_l]\,\mathrm{e}^{-S_t[\phi_l]+\int_p J(-p)\phi_l(p)} \tag{11}$$

ただし，J は任意関数である．S_t の定義式 (8) を用いると，この汎関数積分は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{W_t[J]}&=\int[d\phi_l]\int[d\phi_h]\,\mathrm{e}^{-S[\phi_l+\phi_h]+\int_p J(-p)\phi_l(p)}\\&=\int[d\phi]\,\mathrm{e}^{-S[\phi]+\int_p\frac{K(\frac{p}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}{K(\frac{p}{\Lambda})}J(-p)\phi(p)}\\&=\mathrm{e}^{W_0[J_t]}\end{aligned} \tag{12}$$

ただし，最初の等号で式 (8) を用い，2 番目の等号で式 (6a) および $\phi=\phi_l+\phi_h$ を用いた．また，最終行の J_t は $J_t(p):=\frac{K(\frac{p}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}{K(\frac{p}{\Lambda})}J(p)$ で定義される関数である．

さて，式 (12) より，変換後の理論 S_t に対する母関数 W_t と，変換前の理論 $S_0(=S)$ に対する母関数 W_0 に対して等式 $W_t[J]=W_0[J_t]$ が成り立つことが分かる．この等式から理論 S_t の連結 n 点相関関数 $G_{\mathrm{con}}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;S_t)$ に対して次の等式が成り立つことが言える．

$$\begin{aligned}&G_{\mathrm{con}}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;S_t)\\&=\left[\prod_{i=1}^n\frac{K(\frac{p_i}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}{K(\frac{p_i}{\Lambda})}\right]G_{\mathrm{con}}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;S_0),\quad\forall t\geq 0\end{aligned} \tag{13}$$

ここで，初期値 S_0 として $\mathsf{R}_t^{\mathrm{P}}(S_*)=S_*$ を満たす固定点を持ってくると，$S_t=S_*$ なので固定点の連結 n 相関関数に対しては式 (13) は次の方程式になる．

$$\left(1-\left[\prod_{i=1}^n\frac{K(\frac{p_i}{\Lambda}\mathrm{e}^t)}{K(\frac{p_i}{\Lambda})}\right]\right)G_{\mathrm{con}}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;S_*)=0 \tag{14}$$

明らかにこれの解は $G_{\mathrm{con}}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n;S_*)=0$ のみ．　□

５．まとめと今後の展望

本研究では Polchinski 方程式が依拠する繰り込み群変換を用い，Polchinski 方程式に非自明な固定点が無いことを非摂動論的に証明した．今後は固定点を持つフロー方程式の一般的構造を明らかにしたい．

参考文献

[1] K. G. Wilson and J. B. Kogut, Phys. Rept. **12** (1974) 75–199.

[2] J. Polchinski, Nucl. Phys. B **231** (1984) 269–295.

[3] Y. Igarashi, K. Itoh, and H. Sonoda, Prog. Theor. Phys. Suppl. **181** (2010) 1–166.