P-10

染色ハミルトンパスを持つ辺着色グラフの特徴付について

About Characteristics of edge coloring graph with property colored hamiltonian path

○吉田優司
*Yoshida Yuji

Abstract: A subgraph of an edge-colored graph G is called a properly colored (PC) subgraph if no adjacent edges in G have the same color. In 2006, Feng et al. [4] showed that an edge-colored complete graph has a PC Hamilton path if and only if it has a PC 1-path-cycle factor. In this talk, we consider a similar characterization for edge-colored multipartite complete graphs.

1. 辺着色問題

グラフ G と集合 S に対して，$c : E(G) \to S$ を G の**辺着色**と呼び，その対 (G, c) を**辺着色グラフ**と呼ぶ．特に，$|c(E(G))| = k$ のとき，c を k **辺着色**と呼ぶ．さらに辺着色グラフ (G, c) の任意の点 x に対して，x に接続する辺の全ての色が異なるとき，辺着色 c を**辺彩色**という．また，G の辺彩色が必要な色数が k 以下のとき，G は k **辺彩色可能**であると呼ぶ．グラフ G が k 辺彩色可能である最小の k を G の**辺染色数**といい，$\chi'(G)$ と書く．以後グラフ G 辺彩色であることを G は **PC** (Property Colored) であるという．

辺着色問題や辺彩色問題はこれまでに多くの研究者によって研究されている．そのなかで本研究と関係あるものを紹介する．

辺彩色において，任意の隣接している辺は必ず異なる色を割り当てなければならないので，$\chi'(G)$ が最大次数 $\Delta(G)$ 以上になることは容易にわかる．1964 年に Vizing は $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ であることを示したので，任意のグラフ G に対して $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ が成り立つことがわかる．

辺着色グラフ G に含まれるパス $P = v_1v_2 \cdots v_s$ に対して，$c(v_1v_2), c(v_{s-1}v_s)$ をそれぞれ $start(P), end(P)$ と書く．

定義 1. 辺着色グラフ (G, c) の任意の２点 $u, v \in V(G)$ に対して，それらを結ぶ *PC* パス P_1, P_2 が存在し，$start(P_1) \neq start(P_2)$ 且つ $end(P_1) \neq end(P_2)$ となるとき，(G, c) は**色連結**であるという．

Vizing の定理より，(G, c) が辺彩色になるために少なくとも $\Delta(G)$ 色必要だが，彩色性を色連結性に弱めると必要な色数が大幅に減ることが知られている．

定理 2 ([6])**.** *グラフ G が 2 連結かつ 2 部グラフならば適当な２辺着色 c が存在し，(G, c) が色連結となる．*

定理 3 ([6])**.** *グラフ G が２連結ならば，適当な３辺着色 c が存在し，(G, c) は色連結となる．*

図 *3* のグラフは色連結にするのに３色必要な例になっており，定理 *3* の３辺着色は最良である．

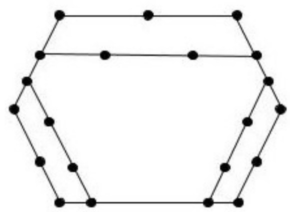

図 1: 色連結するのに３色必要な２連結グラフ

定理３から次の主張を示すことができる．

定理 4 ([6])**.** *グラフ G が２辺連結ならば，適当な辺着色 c が存在し，(G, c) は色連結となる．*

定理 5 ([6])**.** *グラフ G が２辺連結２部グラフならば，適当な２辺着色 c が存在し，(G, c) は色連結となる．*

2. BJG 予想

一方，辺着されたグラフの構造の研究も盛んに行われている．最も基本的な性質の一つが，PC ハミルトンパス（PCHP）を持つグラフの特徴付問題である．ただし，ハミルトンパスとはグラフの全ての点を通るパスである．

最初に，Bang-Jensen と Gutin [1] は，２辺着色完全グラフ (K_n, c) が PCHP をもつための必要十分条件を与えた．

定義 6. 辺着色グラフ (G, c) の点素な *PC* パス P と *PC* サイクル $C_1, \ldots, C_s$ からなる全域部分グラフを **1-path-cycle factor** と呼ぶ．

定理 7 ([1])**.** *2 辺着色完全グラフ (K_n, c) が PCHP をもつための必要十分条件は (K_n, c) が PC 1 path-cycle factor を含むことである．*

1: 日大理工・院 (前)・数学　2: 日大理工・教員・数学

さらに [1] で，Bang-Jensen と Gutin は，上の予想が一般に k 辺着色完全グラフに対して成り立つと予想した．これは **BJG 予想**と呼ばれている．

最初に PC 1-path cycle factor のパスを PC サイクルに置き換えた場合（**PC cycle factor** と呼ぶ）に対して主張が成り立つことを示した．

定理 8 ([2])**.** k 辺着色完全グラフ (K_n, c) が *PC cycle factor* を含むならば G は *PCHP* を含む．

さらに，(K_n, c) が単色な長さ３のサイクル（三角形）を含まない場合が解決された．

定理 9 ([5])**.** 単色な３三角形を含まない辺着色完全グラフは *PCHP* を含む

最終的に 2006 年 Feng et al.[4] が，BJG 予想が正しいことを証明した．

定理 10 (2023)**.** 辺着色完全グラフ (K_n, c) が *PCHP* を持つための必要十分条件は，*PC 1-path-cycle factor* を持つことである．

3. 定理 10 の完全多部グラフへの拡張

グラフ G が点集合 $V(G)$ の分割 $V_1, \ldots, V_s$ で，各部集合 V_i の２点が独立点集合で，任意の $1 \le i < j \le s$ に対して $V_i \cup V_j$ が誘導する部分グラフが完全２部グラフになるとき，G を**完全 s 部グラフ**と呼ぶ．以下，各部集合 V_i が n_i 点からなるとき，完全 s 部グラフを $K_{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ と書く．

定理 10 の完全 s 部グラフへの拡張を考えるのは自然である．

問題 11. 辺着色完全多部グラフ $K_{n_1,n_2,\ldots,n_s}$ が *PCHP* を持つための必要十分条件を求めよ．

完全２部グラフ K_{n_1,n_2} の場合，$|n_1 - n_2| \ge 2$ のとき，明らかにハミルトンパスがないので，以下の条件が完全２部グラフの PCHP に対する必要条件になる．

定義 12. 完全２部グラフ K_{n_1,n_2} が $|n_1 - n_2| \le 1$ となるとき，K_{n_1,n_2} は **semi-balanced** であるという．

我々は以下の予想が成り立つと予想している．

予想 13. *semi-balanced* な辺着色完全２部グラフ (K_{n_1,n_2}, c) が *PCHP* を持つための必要十分条件は (K_{n_1,n_2}, c) が *1-path-cycle factor* を持つことである．

この予想を解決するために，現在まず２着色の場合を解決する研究を行っている．

予想 14. *semi-balanced* な２辺着色完全２部グラフ (K_{n_1,n_2}, c) が *PCHP* を持つための必要十分条件は (K_{n_1,n_2}, c) が *1-path-cycle factor* を持つことである．

上の予想の解決に定理 10 の証明方法を応用したいが，定理 10 の証明は非常に難解かつ煩雑で，そのまま応用するのが難しい．そのため定理 10 の証明の，より本質的でシンプルな証明が求められている．最近 Li と Ning は [3] で定理 10 の改善された証明を与えているが，応用するにはより構造を使った証明が必要であると予想している．

4. 参考文献

[1] J. Bang-Jensen, G. Gutin, Alternating cycle and paths in edge-colored multigraphs: A survey, Discrete Mathematics 165-166 (1997) 39–60.

[2] J. Bang-Jensen, G. Gutin, A. Yeo, Properly coloured hamiltonian paths in edge-coloured complete graphs, Discrete Applied Mathematics 82 (1) (1998) 247–250.

[3] Ruonan Li, Bo Ning, A revisit to several theorems on properly colored cycles, preprint

[4] J.Feng, H.-E. Giesen, Y. Guo, G. Gutin, T. Jensen, A. Rafiey, Characterization of edge-colored complete graphs with properly colored hamilton paths, Journal of Graph Theory 53 (4) (2006) 333–346.

[5] O.Barr, Properly coloured hamiltonian paths in edge-coloured complete graphs without monochromatic triangles, Ars Combinatorica 50 (1998) 316-318.

[6] Xueliang Li, Properly Colored Notions of Connectivity - A Dynamic Survey (2015).

[7] V.Borozan, S. Fujita, A Gerek, C. Magnant, Y. Manoussakis, L. Montero, and Z. Tuza. Proper connection of graphs. Discrete Math., 312(17):2550-2560, 2012.