P-12

結晶成長モデルに対する Łojasiewicz-Simon 勾配不等式

The Łojasiewicz-Simon gradient inequality for a PDE related to grain boundary motion

○水野 将司 [1]，﨑山 歩実 [2]，高棹 圭介 [3]
*Masashi Mizuno[1], Ayumi Sakiyama[2], Keisuke Takasao[3]

Abstract: We consider a system of differential equations related to the motion of grain boundaries. The model consists of the curve shortening equation with a variable mobility coefficient as a local interaction of the grain boundaries and the equation of so-called misorientation, the difference between two grains constituting the grain boundary. These equations are based on the dissipation structure of a grain boundary energy functional. Assuming that the grain boundary density function is analytic, we study the existence of a global-in-time solution and the long-time asymptotic behavior of the model. A key ingredient is to construct the Łojasiewicz-Simon inequality associated with the model.

1. 結晶成長モデルに由来する微分方程式系

次の微分方程式系に周期境界条件を課した問題を考察する．

$$\begin{cases} \dfrac{u_t(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} = \mu\sigma(\alpha(t))\left(\dfrac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\right)_x, & x\in\mathbb{T},\ t>0, \\ \alpha_t(t) = -\gamma\sigma'(\alpha(t))\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,dx, & t>0, \end{cases} \tag{GBM}$$

$\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong[0,1)$ は 1 次元トーラスであり，$\sigma=\sigma(\alpha):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は与えられた関数，$\mu,\gamma>0$ は与えられた正の定数，$u=u(x,t):\mathbb{T}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は未知の周期関数，$\alpha=\alpha(t):\mathbb{T}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は未知関数とする．この方程式は，グラフ $y=u(x,t)$ を結晶粒界とみなし，結晶粒界エネルギーを

$$E(u,\alpha)(t) := \sigma(\alpha(t))\int_0^1 \sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,dx \tag{GBE}$$

で与えたとき，エネルギーの消散構造

$$\frac{d}{dt}E(u,\alpha)(t) = -\frac{1}{\mu}\int_0^1\left(\frac{u_t(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\right)^2\sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,dx - \frac{1}{\gamma}|\alpha_t(t)|^2 \le 0 \tag{EnergyLaw}$$

が成り立つための十分条件である [2]．これは，[1] で導出した結晶粒界の数理モデルのうち，3 つ以上の結晶粒界が交わる点での影響を緩和した，結晶粒界の発展に着目したモデルといいかえることができる．以下，σ は解析的かつ，ある正定数 $C>0$ が存在して，すべての $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $\sigma(\alpha)\ge C$ を仮定する．この仮定のもとで，(GBM) の古典解 (u,α) の長時間挙動を報告する．

2. 大域可解性

(GBM) の解の長時間挙動を調べるために，古典解の時間大域可解性を説明する．解の存在においては，u の勾配評価と α の先験評価が鍵となる．[2] において，σ の正値性のみで u の勾配評価は得られているので，α の先験評価が必要となる．[2] では，α に対する最大値原理を得るために，σ に対する凸性，すなわち，すべての $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $\sigma'(\alpha)\alpha\ge 0$ を仮定していた．(GBM) の係数の符号を詳細に調べることで，σ の凸性の仮定なしに大域解の存在を示すことができた．

定理 1. $u_0:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ は Lipschitz 関数，$\alpha_0\in\mathbb{R}$ とする．σ は C^1 級で，σ' は (一様)Lipschitz 連続と仮定する．このとき，$(u(x,0),\alpha(0))=(u_0(x),\alpha_0)$ を初期値とする (GBM) の古典解が時間大域的に存在する．

1: 日大理工・教員・数学　2: ニッセイ情報テクノロジー株式会社　3: 京大理

3. 長時間挙動と Łojasiewicz-Simon 勾配不等式

[2] では，σ の凸性の仮定のもとで，$\sup_{x\in\mathbb{T}} u(x,t), \alpha(t)$ の指数減衰評価を示した．ところで，α は結晶粒界を構成する二つの結晶の方位の差であり，本研究においては，$\alpha = 0$ と $\alpha = \frac{\pi}{2}$ では同じエネルギーとなることが自然である．このことから，σ が周期関数，例えば $\sigma(\alpha) = 1 + \frac{1}{2}\sin^2(4\alpha)$ が適用できるような理論を構築したい．

[3] によって，σ の解析を仮定することで，Łojasiewicz-Simon 不等式を導出した．

定理 2. (u,α) を (GBM) の古典解とする．$\sigma'(\bar{\alpha}) = 0$ とする．このとき，$\delta > 0$，正定数 $D_0 > 0$ が存在して $\|u(t)\|_{H^2} + |\alpha(t) - \overline{\alpha}| < \delta$ ならば

$$\sqrt{\gamma\left|\sigma'(\alpha(t))\int_0^1\sqrt{1+u_x^2(x,t)}dx\right|^2 + \mu\left\|\sigma(\alpha(t))\left(\frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\right)_x\right\|^2_{L^2\left(\sqrt{1+u_x^2(x,t)}dx\right)}} \geq D_0(E(u,\alpha) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{1-\theta}$$

が成り立つ.

[2] による u の勾配評価と組み合わせると $C > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(u,\alpha)(t) &\leq -D\left(|\alpha'(t)| + \left\|\frac{u_t(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}}\right\|_{L^2\left(\sqrt{1+u_x^2(x,t)}dx\right)}\right)(E(u,\alpha) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{1-\theta}\\ &\leq -D\left(|\alpha'(t)| + C\|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}\right)(E(u,\alpha) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{1-\theta}\end{aligned}$$

とできる．そこで，$-\frac{d}{d\tau}(E(u,\alpha)(\tau) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{\theta}$ を考える. 先の結果より，

$$\begin{aligned}-\frac{d}{d\tau}(E(u,\alpha)(\tau) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{\theta} &= -\theta(E(u,\alpha)(\tau) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{\theta-1}\frac{d}{d\tau}E(u,\alpha)(\tau)\\ &\geq D\theta\left(|\alpha'(\tau)| + C\|u_\tau(\tau)\|_{L^2(0,1)}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. 両辺を $[s,t]$ で積分すると

$$\begin{aligned}(E(u,\alpha)(s) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{\theta} - (E(u,\alpha)(t) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{\theta} &\geq \int_s^t D\theta\left(|\alpha'(\tau)| + C\|u_\tau(\tau)\|_{L^2}\right)d\tau\\ &= D\theta\left(\int_s^t|\alpha'(\tau)|d\tau + C\int_s^t\|u_\tau(\tau)\|_{L^2}d\tau\right)\\ &\geq D\theta\left(\left|\int_s^t\alpha'(\tau)dt\right| + C\left\|\int_s^t u_\tau(\tau)d\tau\right\|_{L^2}\right)\\ &= D\theta\left(|\alpha(t) - \alpha(s)| + C\|u(t) - u(s)\|_{L^2}\right)\end{aligned}$$

である. したがって

$$(E(u,\alpha)(s) - E(\overline{u},\overline{\alpha}))^{\theta} \geq D\theta\left(|\alpha(t) - \alpha(s)| + C\|u(t) - u(s)\|_{L^2}\right)$$

が成り立つ，$E(u,\alpha)$ が時間について減少して，$E(\overline{u},\overline{\alpha})$ に収束することに注意すると，u や α が t に関して Cauchy 列であることが従い，u,α が代数的オーダーで収束することがわかる．

4. 参考文献

[1] Epshteyn, Liu, and Mizuno, SIAM J. Math. Anal. **53**(2021), 3072–3097.

[2] Mizuno and Takasao, Interfaces Free Bound. **23**(2021), 169–190.

[3] 﨑山 歩実，Łojasiewicz-Simon 不等式とその応用，令和 4 年度日本大学理工学研究科修士論文.