P-3

# 数論における Poincaré の補題
## Lemma of Poincaré in arithmetics

○室井龍二
*Ryuji Muroi

Abstract: In this article, we describe the Alladi-Robinson theorem on arithmetic properties of logarithms, relying on a well-known lemma due to H. Poincaré. We explain how this lemma gives the key ingredient in the irrationality proof.

## 1. はじめに

本稿においては Legendre 多項式の性質と H. Poincaré の補題を活用した， K. Alladi 及び M. L. Robinson [1] の自然対数の無理数性の証明について論ずる．

## 2. Poincaré の補題

**定義 2.1** (Legendre 多項式)**.**

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\{x^n(1-x)^n\} \in \mathbb{Z}[x]$$

と定め，$P_n\Big(\dfrac{1-x}{2}\Big)$ を $n$ 次 **Legendre** 多項式と呼ぶ．

また $I_n(z) := \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-zx}dx \quad (z \notin [1,\infty))$ とおく．

ここでは 2 次の Poincaré の補題を紹介する．
この補題は O. Perron，M. Pituk らにより拡張された．

**補題 2.1** (Poincaré の補題 [1, Lemma 5])**.** $\alpha_j$ に収束する複素数列 $a_j(n)$ ( $j = 1, 2, 3$, 但し $\alpha_1 \neq 0$) に対して

$$a_1(n)u_n + a_2(n)u_{n-1} + a_3(n)u_{n-2} = 0$$

を満たす収束数列 $\{u_n\} \subset \mathbb{C}$ で，無限個の $n$ に対し $u_n \neq 0$ となるものを考える．2 次方程式

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0 \tag{1}$$

は絶対値が異なる 2 根を持ち，2 根とも絶対値は 1 ではないとする．このときいずれかの根 $\ell$ に対して

$$|u_n| = |\ell|^{n(1+o(1))} \text{ が成り立つ．} \tag{2}$$

**記号 2.1.** $0 \neq z \in \mathbb{C}$ に対し $\alpha(z), \beta(z)$ を以下に定める．

$$\alpha(z) = \max\left\{\left|\frac{(1 \pm \sqrt{1-z})^2}{z}\right|\right\},$$

$$\beta(z) = \min\left\{\left|\frac{(1 \pm \sqrt{1-z})^2}{z}\right|\right\}.$$

**補題 2.2** (Poincaré の補題の応用 [1, Lemma 6, 7])**.**
(i) $z \notin [0,1]$ ならば，各 $n$ に対し $P_n(z) \neq 0$ かつ
$|P_n(z)| \leq \alpha\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n(1+o(1))} \quad (n \to \infty)$ が成り立つ．
(ii) $z \notin [1,\infty)$ かつ $z \neq 0$ ならば，無限個の $n$ に対し $I_n(z) \neq 0$ かつ $|I_n(z)| = \beta(z)^{n(1+o(1))}$ $(n \to \infty)$ が成立．

*Proof.* 補題 2.2 における (i) の前半は $P_n(x)$ が直交多項式 [3] であることから従う．補題 2.2 (i) の後半の評価を以下で示そう．まず $\forall z \in \mathbb{C}$ に対し次式が成り立つ：

$$nP_n(z)+(2n-1)(2z-1)P_{n-1}(z)+(n-1)P_{n-2}(z) = 0. \tag{3}$$

$P_n(z) \neq 0$ 及び Poincaré の補題 2.1 より，方程式

$$x^2 + 2(2z-1)x + 1 = 0 \tag{4}$$

の一つの根 $\ell$ に対して，

$$|P_n(z)| = |\ell|^{n(1+o(1))} \tag{5}$$

が成り立つ．ここで，$|\ell| = \alpha\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$ または $\beta\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$ である．$z \notin [0,1]$ のとき $\beta\Big(\dfrac{1}{z}\Big) \leq \alpha\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$ より補題 2.2 (i) が従う．(ii) も同様に得られる． □

## 3. 無理数性の証明における Poincaré の補題

本節では Poincaré の補題が自然対数の無理数性の証明において，どのように用いられているかを述べる．

**定義 3.1.** $\theta$ を無理数とする．正の実数 $\mu$ が存在して以下を満たすときに，$\mu$ は $\theta$ の ***irrationality measure*** であるという：$\forall\varepsilon > 0$ に対して $q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，$\forall p/q \in \mathbb{Q}$ $(p, q \in \mathbb{Z},\ \gcd(p,q) = 1, q \geq q_0(\varepsilon))$ ならば

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}$$

が成立する．

**補題 3.1.** べき級数 $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ を考える．$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ に対し次数 $n$ 以下の多項式 $A_n(z), B_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ と，べき級数 $E_n(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ で，$A_n(z) + B_n(z)f(z) = z^{2n+1}E_n(z)$ を満たすものが存在すると仮定する ($\forall n \geq n_0$)．さらに $E_n(0) \neq 0$ 及び $A_n(0)$ と $B_n(0)$ の少なくとも一つは 0 でないとする．このとき

$$A_n(z)B_{n+1}(z) - A_{n+1}(z)B_n(z) = c_n z^{2n+1} \tag{6}$$

を満たす $0 \neq c_n \in \mathbb{C}$ が存在する．

日大理工・院 (前)・数学

**補題 3.2.** $0 \neq \theta \in \mathbb{C}$ とする．実数 $Q > 1, E > 1$ に対し，$\forall n \geq n_0\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})$ において $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ が存在し，

$$|q_n| \leq Q^{n(1+o(1))},\ |q_n\theta - p_n| \leq E^{-n(1+o(1))},$$
$$p_n q_{n+1} \neq q_n p_{n+1}$$

の成立を仮定する．このとき $\theta \notin \mathbb{Q}$ であり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $b_0(\varepsilon)$ が存在して，$a, b \in \mathbb{Z},\ b \geq b_0(\varepsilon)$ ならば

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| > \frac{1}{b^{\frac{\log QE}{\log E}+\varepsilon}}$$

が成り立つ．

**定理 3.1.** $r, s \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ が次の 2 条件を満たすとする．

$$\frac{r}{s} \notin [1,\infty), \quad \beta\left(\frac{r}{s}\right)\cdot|r|\cdot e < 1.$$

このとき，$\log(1 - r/s) \notin \mathbb{Q}$ である．さらに任意の $\varepsilon > 0$ において $b_0(\varepsilon)$ が存在し，$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ b > |b_0|$ に対し

$$\left|\log\left(1-\frac{r}{s}\right) - \frac{a}{b}\right| > \frac{1}{b^{\mu+\varepsilon}} \tag{7}$$

が成立する．この *irrationality measure* $\mu$ は次で定まる：

$$\mu = 1 + \frac{\log\left(\alpha\left(\frac{r}{s}\right)|r|\right)+1}{\log\frac{\alpha\left(\frac{r}{s}\right)}{|r|} - 1}.$$

*Proof.* $z \notin [1,\infty), m \in \mathbb{N}$ に対して，部分積分より

$$\int_0^1 \frac{x^m}{1-zx}dx = \frac{-1}{z^{m+1}}\left[\log(1-z) + \sum_{k=1}^{m}\frac{z^k}{k}\right]$$

であるから，$x$ を因数に持つ $Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在して

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-zx}dx = \frac{-1}{z}P_n\left(\frac{1}{z}\right)\log(1-z) + Q_n\left(\frac{1}{z}\right)d_n^{-1} \tag{8}$$

が成立（$d_n$ は 1 から $n$ までの最小公倍数）．さらに部分積分を $n$ 回行い, 次式を得る：

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-zx}dx = (-z)^n\int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-zx)^{n+1}}dx\,. \tag{9}$$

ここで $A_n(z) = Q_n\left(\frac{1}{z}\right)\cdot z^{n+1}, B_n(z) = -d_n z^n P_n\left(\frac{1}{z}\right)$, $E_n(z) = (-1)^n d_n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-zx)^{n+1}}dx$ とおく. (8)(9) より

$$A_n(z) + B_n(z)\log(1-z) = z^{2n+1}E_n(z) \tag{10}$$

が成り立つ．ここで，$A_n(z), B_n(z) \in \mathbb{Z}[z], \deg A_n(z) = \deg B_n(z) = n, E_n(0) \neq 0,\ B_n(0) = -d_n \times {}_{2n}C_n \neq 0$, $r/s \neq 0$ だから補題 3.1 より

$$A_n\left(\frac{r}{s}\right)B_{n+1}\left(\frac{r}{s}\right) \neq A_{n+1}\left(\frac{r}{s}\right)B_n\left(\frac{r}{s}\right) \tag{11}$$

である．$p_n = -s^n A_n\left(\frac{r}{s}\right), q_n = s^n B_n\left(\frac{r}{s}\right)$ とし，式 (11) の両辺を $-s^{2n+1}$ 倍することで,

$$p_n q_{n+1} \neq q_n p_{n+1} \tag{12}$$

を得る．式 (10)，Poincaré の補題とその応用の補題2.2, Dirichlet の素数定理より以下が得られる：

$$\begin{aligned}\left|q_n\log\left(1-\frac{r}{s}\right) - p_n\right| &= \left|\frac{r}{s}\right||r|^n d_n\left|I_n\left(\frac{r}{s}\right)\right| \\ &\leq \left[|r|e\cdot\beta\left(\frac{r}{s}\right)\right]^{n(1+o(1))}.\end{aligned} \tag{13}$$

さらに，補題2.2より,

$$|q_n| \leq \left|s^n\cdot d_n\left(\frac{r}{s}\right)^n P_n\left(\frac{s}{r}\right)\right| \leq \left|e\cdot r\cdot\alpha\left(\frac{r}{s}\right)\right|^{n(1+o(1))}.$$

補題 3.2 に $\theta = \log\left(1-\frac{r}{s}\right), Q = \left|e\cdot r\cdot\alpha\left(\frac{r}{s}\right)\right|$, $E = \left|r\cdot e\cdot\beta\left(\frac{r}{s}\right)\right|^{-1}$ を適用．定理の仮定より $E > 1$ となり

$$\left|\log\left(1-\frac{r}{s}\right) - \frac{a}{b}\right| > \frac{1}{b^{\mu+\varepsilon}}$$

が成立する．ただし,

$$\begin{aligned}\mu = \frac{\log QE}{\log E} &= \frac{\log\left|e\cdot r\cdot\alpha\left(\frac{r}{s}\right)\right|\left|r\cdot e\cdot\beta\left(\frac{r}{s}\right)\right|^{-1}}{\log\left|r\cdot e\cdot\beta\left(\frac{r}{s}\right)\right|^{-1}} \\ &= 1 + \frac{\log\left(\alpha\left(\frac{r}{s}\right)|r|\right)+1}{\log\frac{\alpha\left(\frac{r}{s}\right)}{|r|} - 1}.\end{aligned}$$

□

定理 3.1 において $r = -1, s = 1$ を適用すると $\log 2$ の *irrationality measure* は4.622以下になることが示せる．$r = (1-\sqrt{3}i)/2, s = 1$ のとき $\pi/\sqrt{3}$ の *irrationality measure* は 8.310 以下になる．

## 4. 今後の課題

上記の Poincaré の補題は，いわゆる差分方程式の定理である．しかしこのように，実数の無理数性の証明にも応用できた．今後の課題としては，この Poincaré の補題の拡張や応用を目指したい.

## 5. 参考文献


[1] K. Alladi and M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980) 137–155.

[2] L. M. Milne-Thompson, *The calculus of finite differences*, Chelsea, 1933.

[3] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, AMs Colloquium Publ., **23**, 1939.