P-4

不均一な拡散を持つ非線形 Fokker-Planck 方程式における自由エネルギーの長時間挙動

Long-time behavior of free energy in nonliner Fokker-Planck model with Inhomogenious Diffusion

○荒木康太
*Kouta Araki

Abstract: We consider the nonlinear Fokker-Planck model with inhomogeneous spatial diffusion subjected to the Neumann boundary condition. The model is based on the continuity equation and we can derive the energy law in terms of some free energy concerning the Fokker-Planck model. Assuming the diffusion coefficient is sufficiently large, we show the exponential decay of the first derivative of the free energy.

1. 非線形 Fokker-Planck 方程式

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は有界な凸領域とする．$D \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ は Ω 上の正値関数，$\phi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$，$\alpha > 1$ とする．以下の非線形 Fokker-Planck 方程式のノイマン問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} - \mathrm{div}(f \nabla(\alpha D(x) f^{\alpha-1} + \phi(x))) = 0, x \in \Omega,\ t > 0, \\ f(x,\ 0) = f_0(x),\ x \in \Omega, \\ f \nabla(\alpha D(x) f^{\alpha-1} + \phi(x)) \cdot \nu = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{NFP}$$

ここで，ν は外向き単位法線ベクトルとする．f_0 は与えられた正値関数で $\|f_0\|_{L^1(\Omega)} = 1$ をみたすものとする．

$$\boldsymbol{u} := -\nabla\mu, \quad \mu := \alpha D(x) f^{\alpha-1} + \phi$$

とおくと (NFP) は連続の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(f\boldsymbol{u}) = 0$$

を満たす．[4] では，Fokker-Planck 方程式を用いた結晶粒界の運動を記述する数理モデルが提唱されており，本質的には $\alpha = 1$ に対応する問題．すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{div}(f \nabla(D \log f + \phi)) \tag{1}$$

を考察している．D が定数の場合，(1) と以下は同じとなる．

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\Delta f + \mathrm{div}(f\nabla\phi)$$

となる．本研究では，$\alpha > 1$ で，D が x の関数である場合を考える．連続の方程式を基礎におくため，

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{div}(f \nabla(\alpha D(x) f^{\alpha-1} + \phi))$$

の形の方程式を研究する．

注意 1 D は温度との関係が示唆されている．本研究で D が x の関数であるということは温度が空間不均一な場合に対応する．

2. 主定理

次に自由エネルギー $F[f](t)$ を以下で定める．

$$F[f](t) := \int_\Omega (D(x) f^\alpha + f\phi)\, dx. \tag{2}$$

f が (NFP) の正値古典解のとき，$T > 0$ に対して，次のエネルギー則

$$F[f](T) + \int_0^T \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 f\, dx\, dt = F[f](0) \tag{3}$$

を満たす．これより，ある単調増加な点列 $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して

$$t_j \to \infty, \quad \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 f\, dx \to 0 \quad (j \to \infty) \tag{4}$$

が成り立つ．そこで (4) での部分列をとらない収束

$$\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 f\, dx \to 0 \quad (t \to \infty) \tag{5}$$

を考察する．D が定数で，ϕ が強凸関数のとき，[1, 2] のエントロピー消散法によれば (5) の指数オーダーでの収束並びに f の L^1 ノルムの長時間挙動が研究されている．他方 $\alpha = 1$ に対する (NFP) の問題は D が定数の時は線形拡散となり，エントロピー消散法が有効である [1]．一方 D が定数でないとき，[3] で (3) をみたす方程式の導出と周期境界条件における (5) が考察されている．D が x の関数，すなわち不均一な拡散をもつ Fokker-Planck 方程式においては，線形拡散であっても非線形方程式となることに注意しておく．本研究では，$\alpha > 1$，すなわちm多孔質媒質型の非線形拡散において (5) が指数オーダーで収束するための D の条件を f が古典解である仮定の下で導出した．

定理 2 $n = 1, 2, 3$ と仮定する．ある正の定数 $\lambda > 0$ が存在して，$\nabla^2\phi \geq \lambda I$ が成り立つとする．ここで I は単位行列である．$\nabla D, \nabla\phi$ は有界とする．f は (NFP) の正値で上に有界な時間大域的古典解とする，このとき，ある正の

日大理工・院 (前)・数学

定数 $C_1>0$ と $C_2>0$ が存在して

$$D(x)\geq C_1,\quad \int_\Omega |\nabla(\alpha D(x)f_0^{\alpha-1}+\phi(x))|^2 f_0\,dx \leq C_2 \tag{6}$$

が成り立つならば，ある正の定数 $C_3>0$ が存在して，

$$\int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 f\,dx \leq C_3 e^{-\lambda t},\qquad t>0 \tag{7}$$

が成り立つ．

注意 3 関数 D が定数に近いとき，すなわち $\|\nabla D\|_\infty$ が十分に小さいときも同様の定理が成り立つ．他方で，主定理では $\|\nabla D\|_\infty$ が大きくても拡散係数 D が十分に大きいとき，(5) は指数オーダーで収束することを主張している．

3. 主定理の証明の概略

(7) は F の時間 1 階微分の評価であるので，F の時間 2 階微分を考察する．D が x の関数のとき，[1] と同様な計算により以下が得られる．

$$\begin{aligned}\frac{d^2F}{dt^2} &= 2\int_\Omega (\nabla\mu\cdot\nabla^2\phi\nabla\mu)f\,dx\\ &\quad + 2(\alpha-1)\int_\Omega D(x)|\nabla^2\mu|f^\alpha\,dx\\ &\quad + 2(\alpha-1)^2\int_\Omega D(x)(\Delta\mu)^2 f^\alpha\,dx\\ &\quad - 2(\alpha-1)\int_{\partial\Omega} D(x)f^\alpha\nabla|\nabla\mu|^2\cdot\nu\,d\sigma\\ &\quad - \int_\Omega (\nabla D(x)\cdot\nabla^2\mu\nabla\mu)f^\alpha\,dx\\ &\quad - 2\alpha\int_\Omega (\nabla D(x)\cdot\nabla\mu)(\nabla f\cdot\nabla\mu)f^{\alpha-1}\,dx\\ &\quad - 2(2\alpha-1)\int_\Omega (\nabla D(x)\cdot\nabla\mu)\Delta\mu f^\alpha\,dx.\end{aligned}$$

D が定数のとき，$\nabla D=0$ になり，[1] の結果と同じになることに注意する．第 4 項目は [1] の結果から正になることが知られている．$\nabla D(x)$ を含む項に注目する．[3] を参考にし，$\nabla^2\mu$，$\Delta\mu$ の現れる項に注目する．f，∇D，$\nabla\phi$ の有界性と，Hölder の不等式，Young の不等式から，ある定数 $C_4>0$ が存在して

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (\nabla D(x)\cdot\nabla^2\mu\nabla\mu)f^\alpha\,dx\\ &\leq \frac{C_4}{C_1}\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx + (\alpha-1)\int_\Omega D(x)|\nabla^2\mu|f^\alpha\,dx\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に右辺の第 7 項目を考える．ある正の定数 $C_5>0$ が存在して，

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (\nabla D(x)\cdot\nabla\mu)\Delta\mu f^\alpha\,dx\\ &\leq \frac{C_5}{C_1}\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx + 2(\alpha-1)^2\int_\Omega D(x)(\Delta\mu)^2 f^\alpha\,dx\end{aligned}$$

が成り立つ．右辺の第 6 項目に注目すると

$$\mu = \alpha D(x)f^{\alpha-1}+\phi$$

であることから ∇f は $\nabla\mu$ の項を含むため，$|\nabla\mu|^3$ の積分を考えなければならない．Sobolev の不等式から，ある正の定数 C_6,C_7,$C_8>0$ が存在して

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\mu|^3 f\,dx &\leq C_6\int_\Omega |\nabla^2\mu|^2 f\,dx\\ &\quad + C_7\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx\right)^3\\ &\quad + C_8\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

とできる．次に C_1 を十分大きくとり，$\nabla^2\phi\geq\lambda I$ を使うと, ある正の定数 C_9，C_{10} を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx\right) &\leq -\lambda\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx\\ &\quad + C_9\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx\right)^3\\ &\quad + C_{10}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

が得られる．よって Gronwall 型の不等式より

$$\int_\Omega |\nabla(\alpha D(x)f_0^{\alpha-1}+\phi(x))|^2 f_0\,dx$$

を十分小さくとることによって

$$\int_\Omega |\nabla\mu|^2 f\,dx \leq C_3 e^{-\lambda t},\qquad t>0$$

が得られる．

4. 参考文献

[1] Jüngel, A., *Entropy methods for diffusive partial differential equations*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, 2016.

[2] Carrillo, J. A., Jüngel, A., Markowich, P. A., Toscani, G., and Unterreiter, A., *Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities*, Monatsh. Math., **133**(2001), 1-82.

[3] Epshteyn, Y., Liu, C., Liu, C., and Mizuno, M., *Nonlinear inhomogeneous Fokker-Planck models: energetic-variational structures and long-time behavior*, Anal. Appl. **20**(2022), 1295–1356.

[4] Epshteyn, Y., and Liu, C., and Mizuno, M., *A stochastic model of grain boundary dynamics: a Fokker-Planck perspective*, Math. Models Methods Appl. Sci. **32**(2022), 2189–2236.