折り紙による正五角形を考える

ー　1:tan36°　の比を折る　ー

日本大学 理工学部 物理学科
教授　高野良紀

折り紙と数学が好きな高校生へ

この資料の多くの部分は私のホームページに数年前から掲載しているものです。

物理学科を希望する高校生の中には宇宙や天文に興味を持っている人たちが多くいます。そのため、オープンキャンパス、出前授業や出前文化祭などでは、天球儀作製をよく行っています。しかし、結構かさばるので、場合によっては、星座や星の折り紙をすることがあります。そのときには、正五角形や $1:\tan\ 36^\circ$ の比の紙が必要になってくるときがあります。そこで、インターネットなどで見られる正五角形の折り方を調べると、疑問に思えることがあったのでまとめてみました。簡単で、本当に正確な正五角形（正しいから正五角形なのだが）の折り方が玉木英彦 著「小学生にピタゴラス」（みすず書房）に載っていました（個人的には昔、玉木英彦 訳「シュポルスキー　原子物理学」にお世話になりました）。その本の中では折り方のみだったので、ここでは、計算して確認しました。他にも正確な正五角形の折り方はあるようです。

これを応用すると、$1:\tan\ 36^\circ$ の比の紙も計算したり、測ったりしないで折ることができます。よく、『A4用紙では長い辺を8mmカットする』とありますが、要りません。折り紙に関しては全

くの初心者なのでなかなか調べきれないため、すでにどこかに掲載されているかも知れません。また、思い違いや考え違いもあると思いますので、ご意見などをいただければと思います。判断力がまだ十分に備わっていない小学生などに間違った情報を与えたくないので、よろしくお願いします。　使う数学は、三角形の合同・相似、三角比、2次方程式、ピタゴラスの定理、中点連結定理、半角の公式、二倍角の公式、三倍角の公式、加法定理くらいでしょうか。作図も基本的なことだけです。高校生なら確実に理解できます。楽しい練習問題になるでしょうか。三角関数の公式がこんなところで役立つとは思わなかった。数値を求めるときには、多重根号の計算も出てきますが、関数電卓（いまどき使っている人は少ない？）やPCがあれば簡単に求められます。数値が大事なのではなく、解析的に求められることが重要です。数学は大切です。物理にも数学は必須です。

多分、こんな計算は面倒くさくて、やっている人が少ないかもしれませんが、何が正しくて、何が間違っているかを、難しいことは使わないで、基本的なことの積み重ねで、定量的（解析的）に理解することはとても大事です。

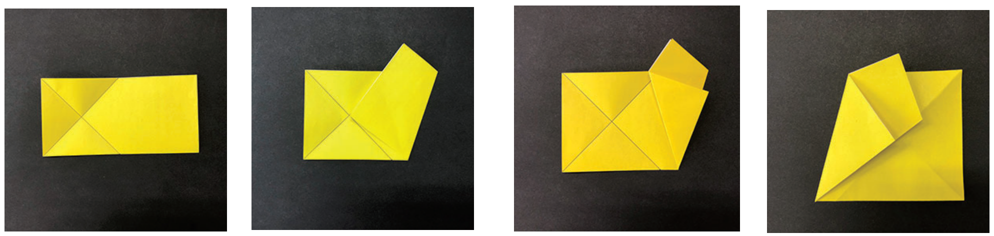
また、正方形から $1:\tan\ 36^\circ$ の比の紙は、折数も少なく、6回折ればできます。どんな矩形（長方形）からでもできるのも汎用性が高いです。用紙を最大限利用しています。始めに $1:\tan\ 36^\circ$ を折りたいという気持ちがありましたが、どうしていいかわからなかったところ、$\tan\ 36^\circ$ と $\sqrt{3}-1$ が非常に近いことをある方のHP（「晴耕雨折　-折り紙な日々-」　2015年12月16日）で知り、正三角形の折り方を調べていたら、$\sqrt{3}-1$ の折り方が分かりました。中点連結定理を使います。これは正方形だからできた結果です。正方形からは5回折ればできます。A4用紙での $1:(\sqrt{3}-1)$ の拡張も、分母の有理化をしているときに分かりました。辺の長い方を有効に使えます。これで満足していたのですが、どうしても $1:\tan\ 36^\circ$ を折りたい、正五角形にヒントがあるに違いないと思い、正五角形の折り方を調べていたところ、玉木英彦氏の著作にあたりました。その折り方では、$\sqrt{5}-1$ が正方形の頂点のところにあったので、すぐに思いつきました。

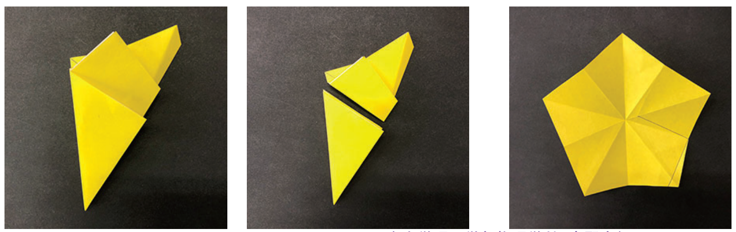
物事は思い、願い続ければ必ず叶うといろいろな人が言っていて、そんなのはまやかしだと思っていましたが、これについては本当だと思いました。

本論に入る前に、ここで取り上げた正五角形と称する5つの五角形を折っていく過程の写真を示します。番号は後の数学的な解析をしているものと一致しています。

写真では、わからない部分もあると思いますので、正確な折り図は折り紙の本を探してください。本の中には正五角形ではなく、単に五角形と示してある本もあります。

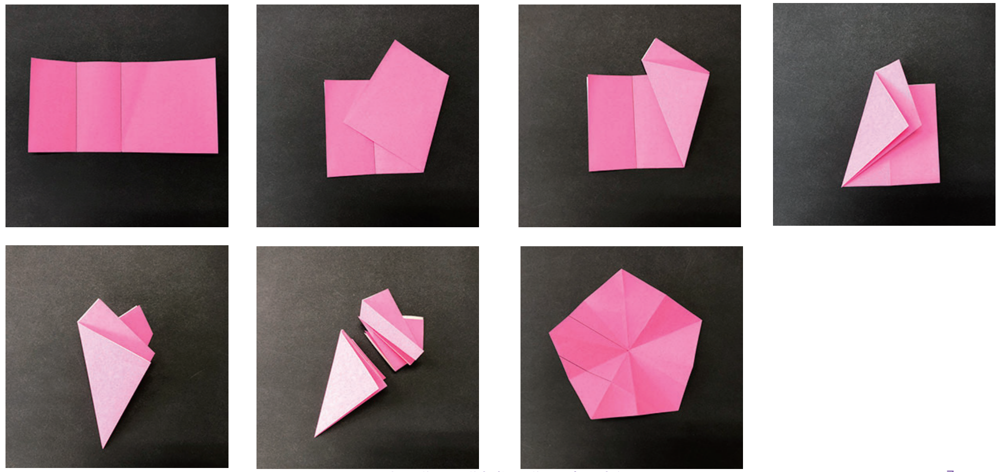
(1)



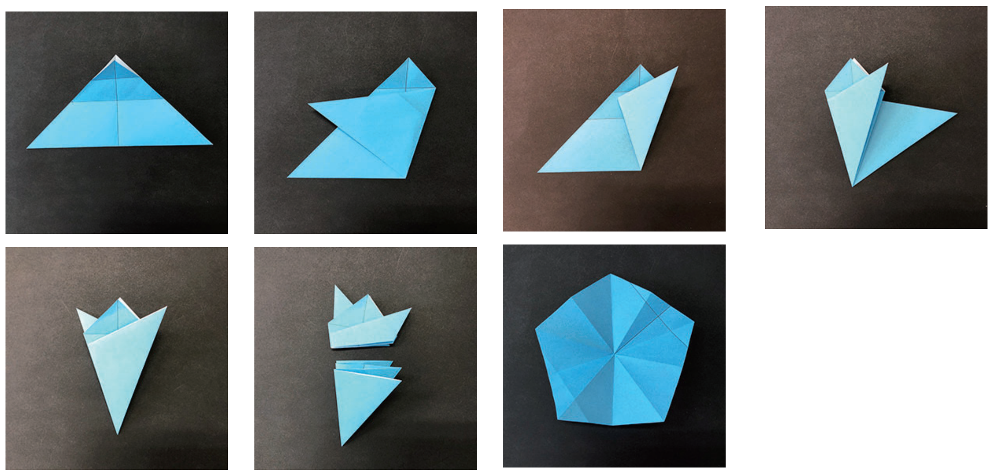


(1)と(5)の折り方の違いは写真ではよくわからないと思います。

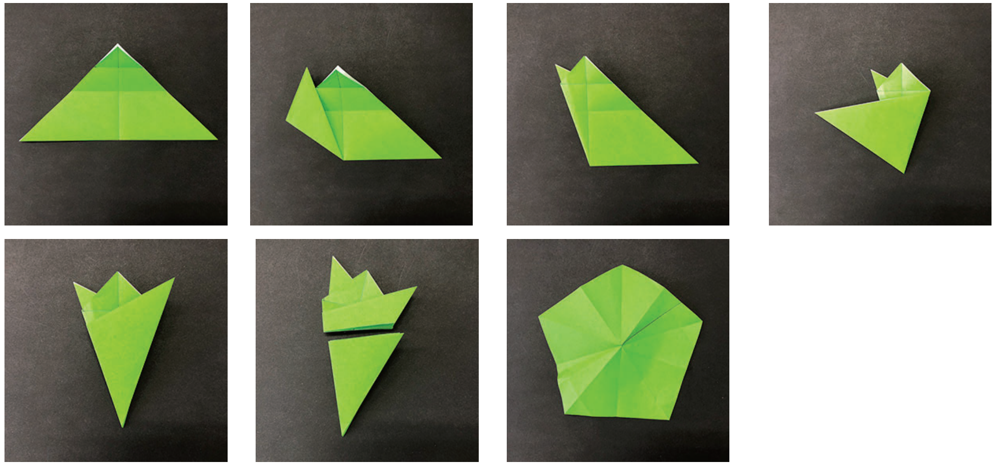
(2)



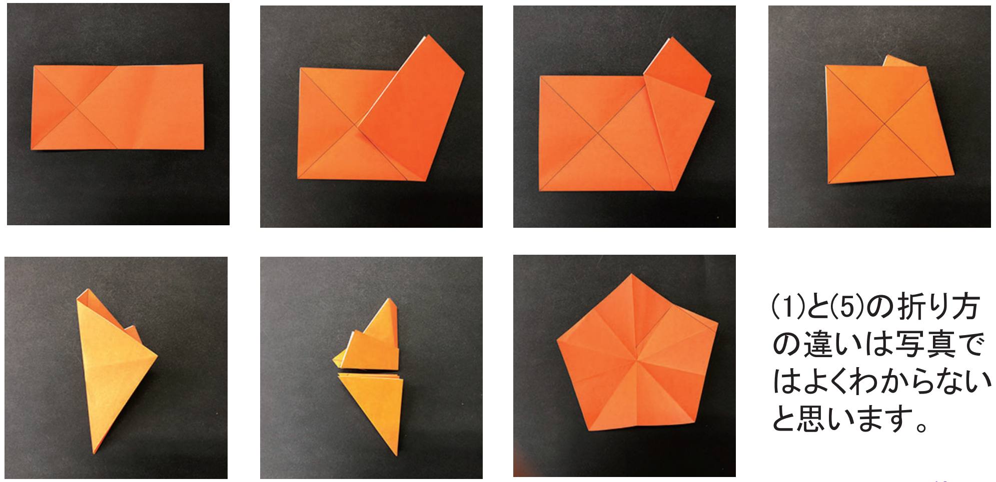
(3)



(4)



(5)



(1)と(5)の折り方の違いは写真ではよくわからないと思います。

では、始めましょう！

星座や星の折り紙

正五角形や1：tan36°の比の紙が必要

インターネットの正五角形の折り方

怪しいのが多い

何が正しいか知りたい

1：tan36°の比の紙

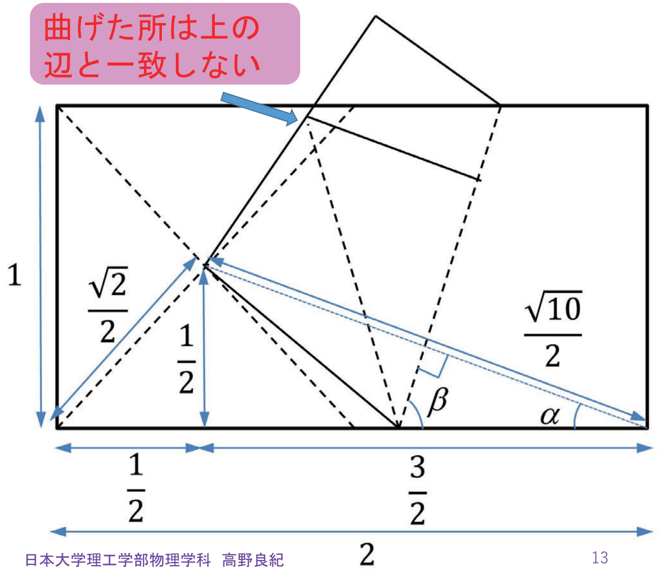
A4用紙では長いほうを8mm切る

測りたくない

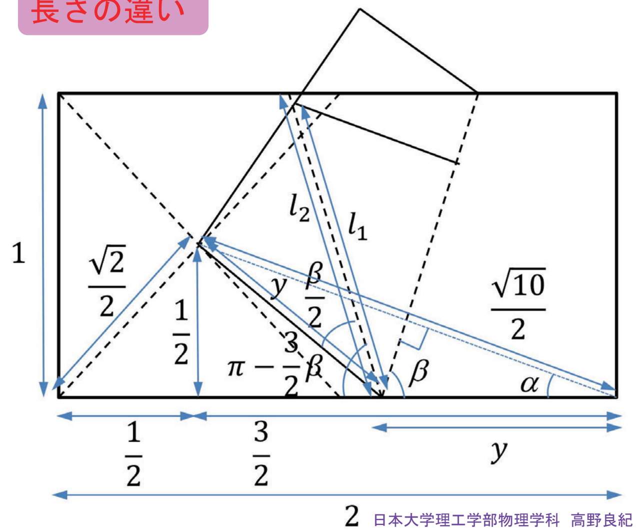
正五角形と称する折り方

(1)

曲げた所は上の辺と一致しない



長さの違い



$$y\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$y = \frac{\sqrt{10}}{4\cos\alpha} = \frac{5}{6}$$

$$l_1 \cos\frac{\beta}{2} = \frac{5}{6}$$

$$l_1 = \frac{5}{6\cos\frac{\beta}{2}} = 1.027$$

$$l_2 \sin\left(\pi - \frac{3}{2}\beta\right) = 1$$

$$l_2 = \frac{1}{\sin\frac{3}{2}\beta} = 1.048$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = 18.43^\circ$$ ⟵ 18°　でない!

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 71.57^\circ$$

$$\frac{72 - 71.57}{72} \times 100 \sim 0.60\ \%$$

$$\sin\beta = \frac{\frac{\sqrt{10}}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

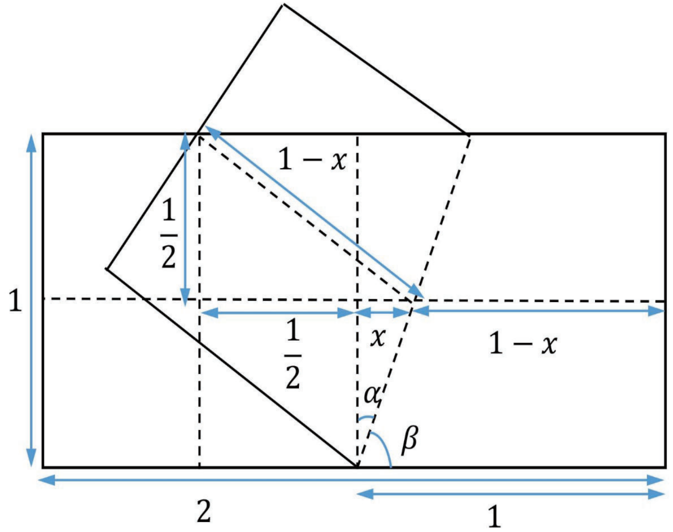
$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \left(\frac{1-\cos\beta}{2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{10}}}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{10-\sqrt{10}}{20}}$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{10}}}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{10+\sqrt{10}}{20}}$$

$$\sin\frac{3\beta}{2} = \sin\beta\cos\frac{\beta}{2} + \cos\beta\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{20}\left(3\sqrt{10+\sqrt{10}} + \sqrt{10-\sqrt{10}}\right)$$

(2)



$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+x\right)^2 = (1-x)^2$$

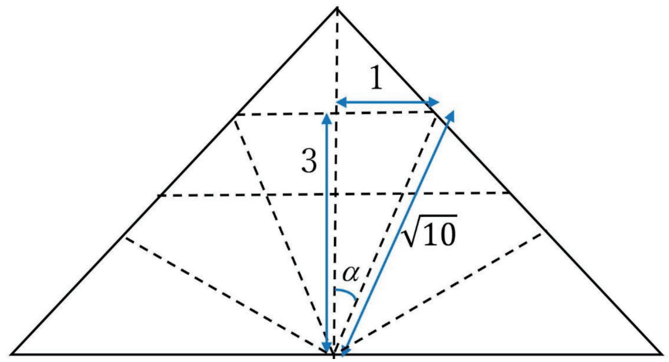
$$x = \frac{1}{6}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{3}$$

$\alpha = 18.43°$ ← 18° でない

$\beta = 90 - \alpha = 71.56°$

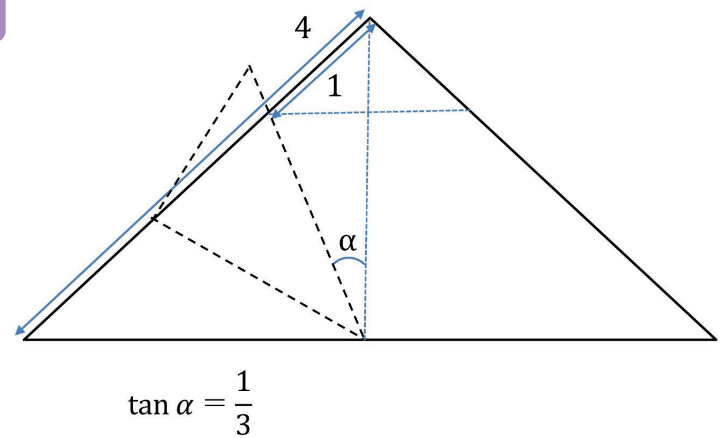
(3)



$$\tan\alpha = \frac{1}{3}$$

$\alpha \sim 18.43°$ ← 18° でない

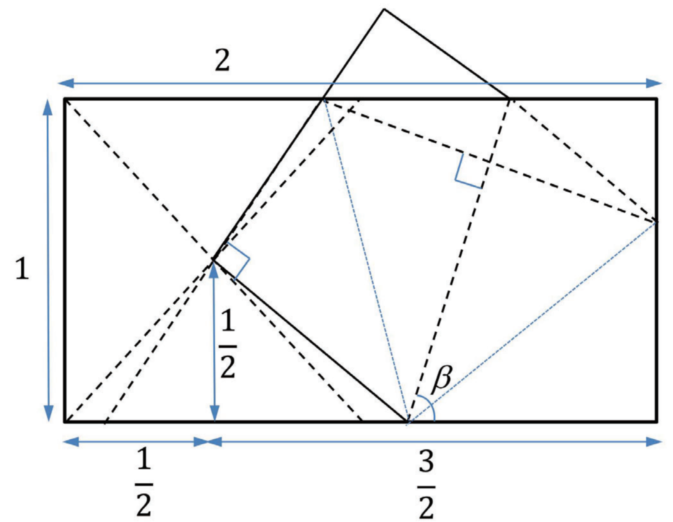
(4)



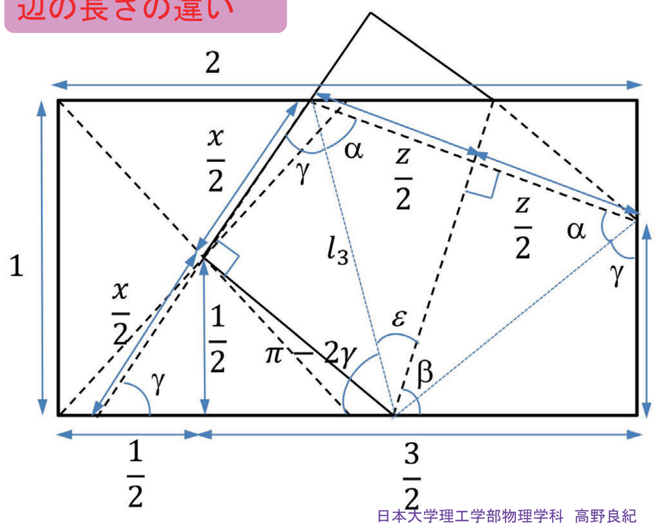
$$\tan\alpha = \frac{1}{3}$$

$\alpha \sim 18.43°$ ← 18° でない

(5)



辺の長さの違い



$$\alpha+\gamma+\beta=\pi$$
$$(\pi-2\gamma)+\beta+\varepsilon=\pi$$
$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\varepsilon$$

$$\alpha=\frac{3}{2}\pi-3\beta$$
$$\gamma=2\beta-\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\alpha=\cos\left(\frac{3}{2}\pi-3\beta\right)=-\sin 3\beta=-3\sin\beta+4\sin\ ^3\beta=\frac{9}{5\sqrt{10}}$$

$$\alpha=55.30°$$

$$\cos\gamma=\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\frac{3}{5}$$

$\gamma=53.13°$ ⬅ 54° でない

$$\sin\alpha=\frac{13}{5\sqrt{10}}$$

$$\sin\gamma=\frac{4}{5}$$

$$2l_3\cos\gamma=x$$
$$2l_3\cos\alpha=z$$

$$x\sin\gamma=1$$

$$l_3=\frac{1}{2\sin\gamma\cos\gamma}=\frac{1}{\sin 2\gamma}$$

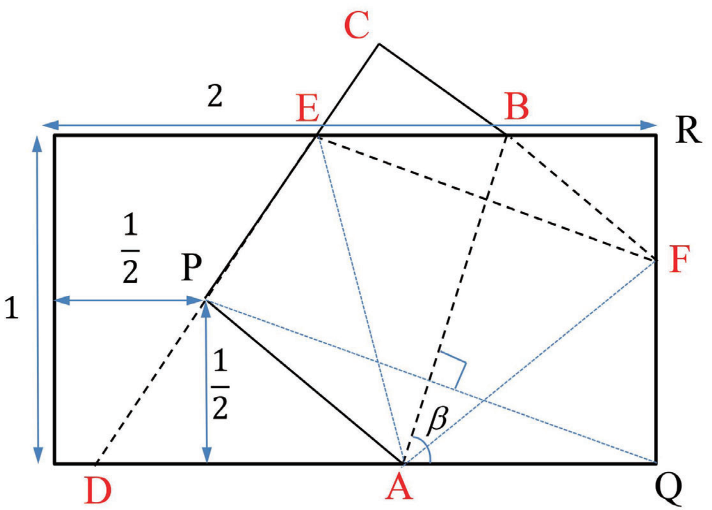
$$x=\frac{1}{\sin\gamma}=\frac{5}{4}=1.25$$

$$z=\frac{\cos\alpha}{\sin\gamma\cos\gamma}=\frac{15}{4\sqrt{10}}=1.186$$

折り紙ではなかなか分からないが、作図するとよくわかる。

γの方は、超有名な3:4:5の直角三角形になっている。

作図



点P, Q, R以外は作図による点。

1) 点Pと点Qを結ぶ。
2) 線分PQの垂直2等分線をとり、底辺との交点を点A、上辺との交点を点Bとする。
3) 点Pから長さQRの弧を、点Bから長さBRの弧を描き、2つの弧の交点を点Cとする。
4) 点Cと点Pを結び、延長線上で底辺との交点を点D、上辺との交点を点Eとする。
5) 点Qから長さPEの弧を描き、線分QRとの交点を点Fとする。

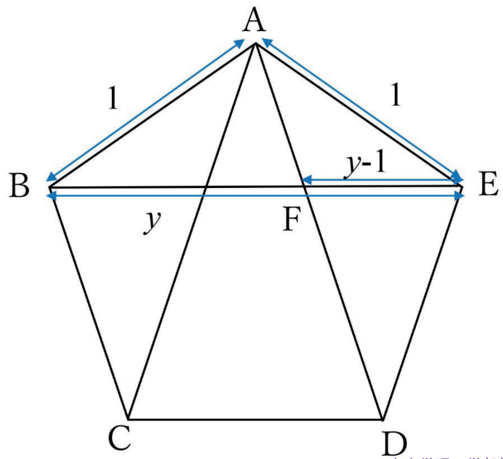
線分DEと線分EFの長さを比較する。

(1)～(4)の4つの折り方は全部同じである。(5)は違う。(5)のずれは大きい。

しかし、よくこれだけ近い値を見つけるだけでなく、図形の中に入れ込んで、ほぼ正五角形としてつくれるなあ。すごい！！

切る場所のわかっている(1)が便利。

正五角形の折り方



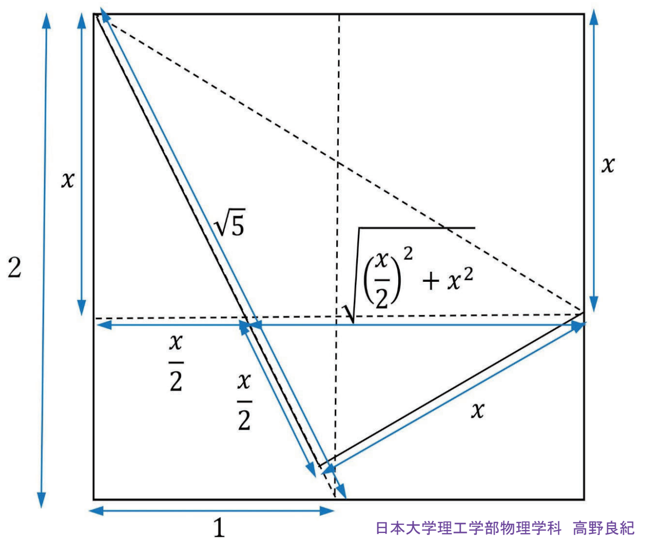
$$1:y = (y-1):1$$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2} = x:2$$

$$x = \sqrt{5} - 1$$



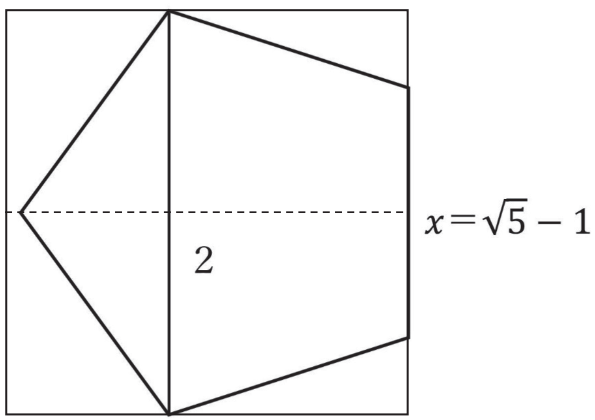
$$\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+x^2}+\frac{x}{2}=2$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+x^2=\left(2-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$x^2+2x-4=0$$

$$x=\sqrt{5}-1>0$$

あとは右側のxを辺の中央に移動すればよい。



正しい正五角形の折り方は、玉木英彦「小学生にピタゴラス」(みすず書房)をご覧ください。

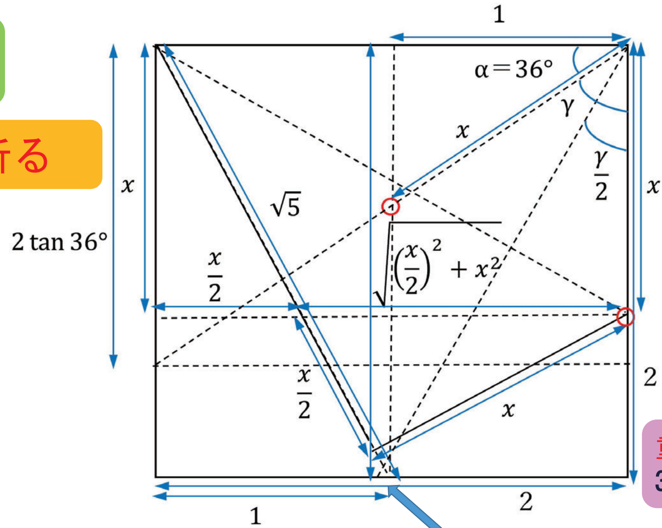
きれいに折るのは難しい。

数学的に正しいのときれいに折れるのとは別！

応用例

1: tan 36° を折る

正方形



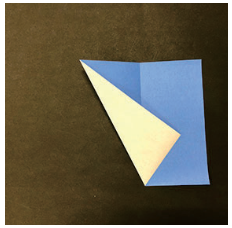
重なると 36. 87°

少しはみ出る。**重要！**

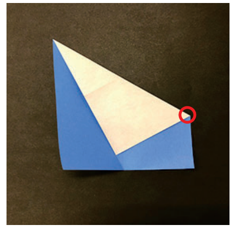
1: tan 36° の折り方

①半分に折って開く。

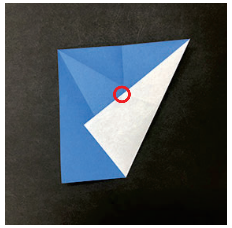
②1つの辺を中心に合わせて折る。



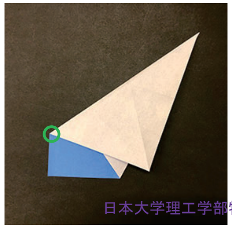
③②でできた折れ線に合わせて折る。



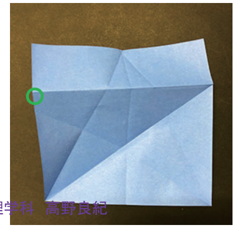
④③でできた折り目を中線に合わせて折る。



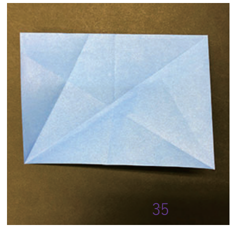
⑤④で折りたたまれた辺に合わせて折る。



⑥最後にできた折り目のところで全体を折る。



⑦しっかり折り込んで完成。



はみ出る長さ

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

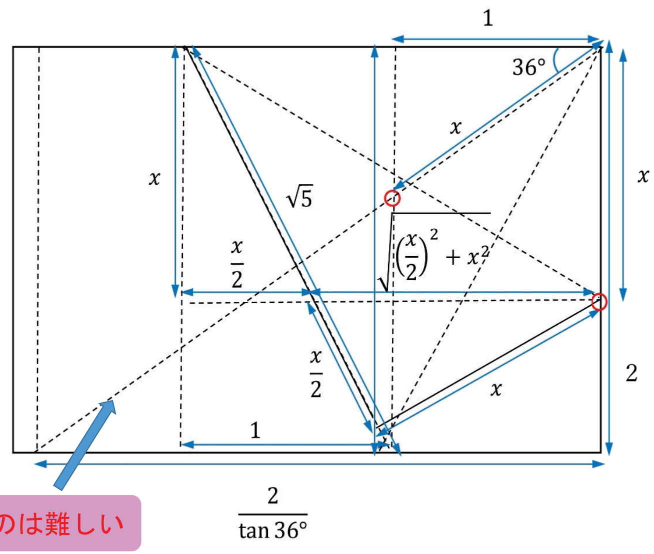
$$\tan\frac{\gamma}{2} = \left(\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}\right)^{1/2} = \left(\frac{1-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{1+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}\right)^{1/2}$$

$$2\tan\frac{\gamma}{2} - 1 = 2\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}} - 1 = 0.019$$

A4用紙

実際には、矩形の用紙なら何でもOK!

最後の延長線の交点から、交わっていない辺に平行に折ればよい



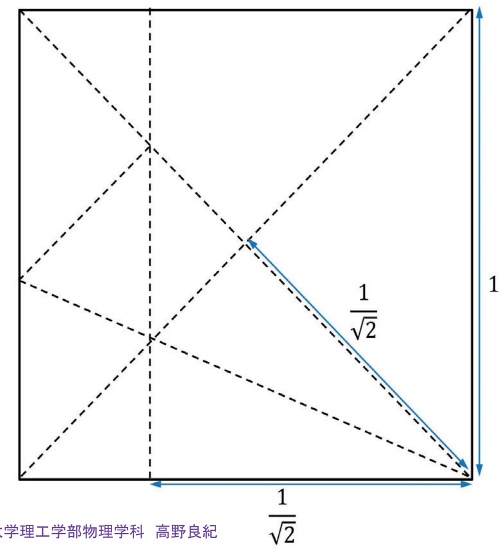
長くきれいに折るのは難しい

参考1

1: $\sqrt{2}$ を折る

正方形

Aサイズ、Bサイズの用紙ならそのもの

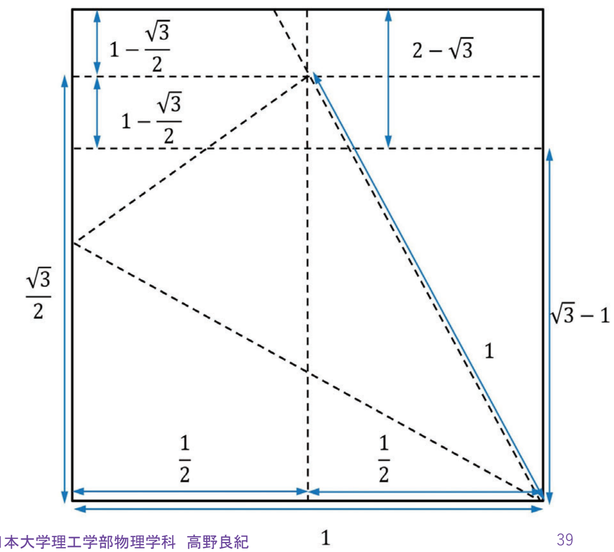


参考2

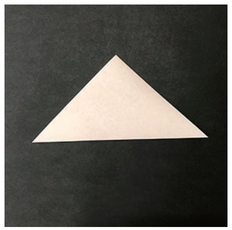
1: $\sqrt{3}-1$ を折る

正方形

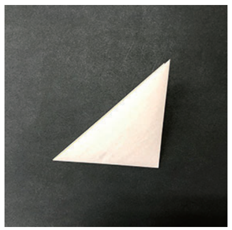
$\sqrt{3}-1$ は $\tan 36°$ の近似値。誤差0.76%



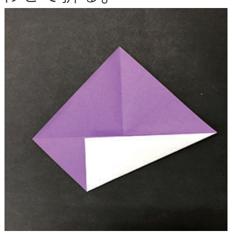
①半分に折る。



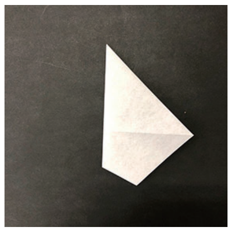
②さらに、半分に折る。



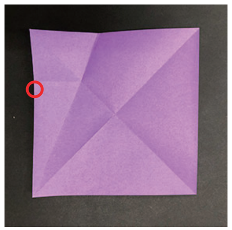
③②でできた折線に合わせて折る。



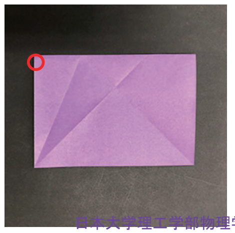
④中線に合わせて折る。



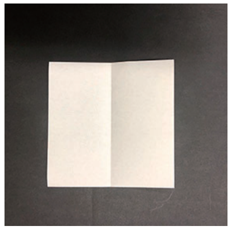
⑤辺にできた折り目のところで全体を折る。



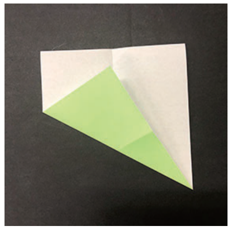
⑥しっかり折り込んで完成。



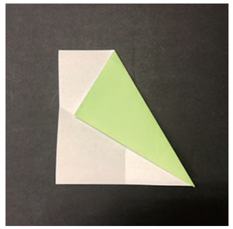
①半分に折って開く。



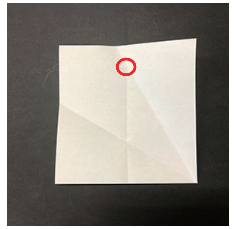
②中心線に合わせて折って、開く。



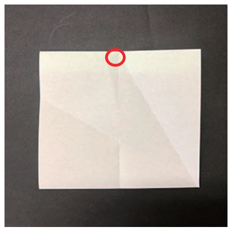
③②でできた折れ線に合わせて折る。



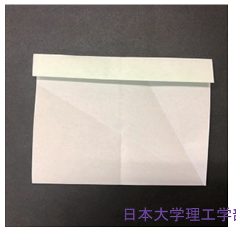
④開く。



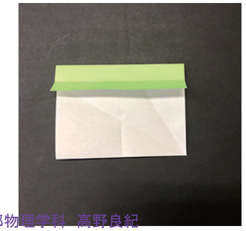
⑤中心線との交点で裏側に折る。



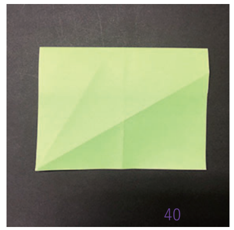
⑥同じ幅だけ手前に折る。



⑦折り目を伸ばす。



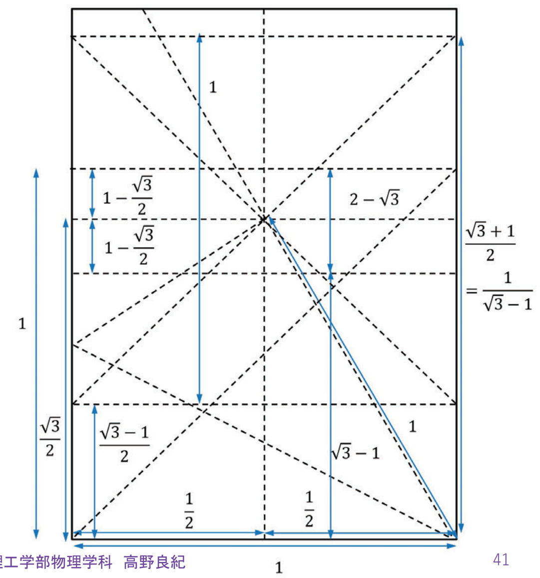
⑧しっかり折りこむ。



A4用紙

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1$$

正確な表現ではないが、AサイズやBサイズの用紙より長ければOK!



補足

1: tan 36°の折り方が悪く、折り線が重なってしまった場合

3:4:5の直角三角形になってしまう。
逆に、3:4:5の直角三角形の折り方？

$$\tan\frac{\gamma^*}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\gamma^*=\frac{2\tan\frac{\gamma^*}{2}}{1-\tan^2\frac{\gamma^*}{2}}=\frac{4}{3}$$

$$\alpha^*=\frac{\pi}{2}-\gamma^*$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha^*\right)=\cot\alpha^*=\frac{4}{3}$$

$$\tan\alpha^*=\frac{3}{4}$$

$$\alpha^*=36.87°$$

まとめ

正多角形とは各辺の中心角が等しい図形。

等しいということは角度がピタリと重なる。

正五角形は折り紙を半分にして使っている。

$$72°+72°+36°=180°$$

$$(36°+36°)+(36°+36°)+36°=180°$$

中心角が 36°の図形が5枚重なればいい。

➡ できていない。

楽しい練習問題になりましたか？

数学は大切です。
物理にも数学は必須です。

何が正しくて、何が間違っているかを、難しいことは使わないで、基本的なことの積み重ねで、定量的（解析的）に理解することはとても大事です。

「わかる」ということが、どういうことなのかを知り、「わかる」喜びを感じていただければいいと思います。

物事は思い、願い続ければ必ず叶うといろいろな人が言っていて、そんなのはまやかしだと思っていましたが、これについては本当だと思いました。

NU
CST
100TH
1920 >> 2020