

複素固有値解析を介した D.M.同調システムの簡易設計法  
その 1. 相対変位に対する最適設計式

A Simple Design Method for Tuned Dynamic Mass System by Complex Eigenvalue Analysis  
Part1 An Optimum Design Method on the Relative Response Displacement

○押山育未<sup>3</sup>, 石丸辰治<sup>1</sup>, 秦一平<sup>2</sup>, 古橋剛<sup>2</sup>, 三上淳治<sup>1</sup>

\*Ikumi Oshiyama<sup>3</sup>, Shinji Ishimaru<sup>1</sup>, Ippei Hata<sup>2</sup>, Takeshi Furuhashi<sup>2</sup>, Junji Mikami<sup>1</sup>

This study is examined about the simple design method of the structure built in "Tuned Dynamic Mass System" that connects Dynamic Mass (D.M.) and the bearing member with the series. This paper is reported on an optimum tuning rule and damping expression against the relative response displacement.

1.1 はじめに

ダイナミック・マス (D.M.: 回転慣性質量) とは, ボールねじにより軸方向運動を回転方向運動に増幅変換することにより, 軸方向変形に対する回転方向の変位増幅倍率  $\beta$  を 20~40 倍にすることが可能であるデバイスである. 振動状態においては, 回転部の付加質量  $m_d$  は  $m_d\beta^2$  に増幅される. このデバイスをトグル制震装置やパンタグラフ式制震装置のダンパー部として練成させると, それらの剛性ばねと D.M. の同調を利用した画期的な制震システムを構成できる.

本報では, この D.M. 同調システムを用いた構造物の最適設計法を Den Hartog の定点理論の視点から示し, 複素固有値解析を介して簡易に設計できることを紹介する.

1.2 固有周期による最適同調式

Figure1-1 の 1 質点系に D.M. 同調システムを付加した系を示す. このシステムの振動方程式は(1-1)式のようになる.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2h_d\omega_d}{\eta_d} & \frac{2h_d\omega_d}{\eta_d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0^2 & \omega_0^2\kappa_k \\ \omega_0^2 & \omega_0^2\kappa_k(1+\frac{1}{\eta_d}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{y} \quad (1-1)$$

$$\begin{aligned} \eta_d &= \frac{m'}{m}, \kappa_k = \frac{k_d}{k}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \omega_d^2 = \frac{k_d}{m'} = \kappa_k \frac{\omega_0^2}{\eta_d}, \\ \frac{k_d}{m} &= \frac{k_d}{k} \frac{k}{m} = \omega_0^2 \kappa_k, \\ \frac{c_d}{m} &= 2h_d\omega_0, \frac{c_d}{m'} = \frac{c_d}{m} \frac{m}{m'} = \frac{2h_d\omega_0}{\eta_d} \end{aligned} \quad (1-2)$$

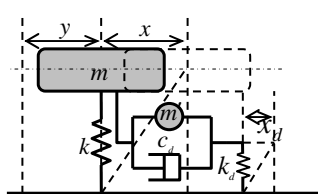


Figure1-1 SDOF model of Tuned Dynamic Mass System

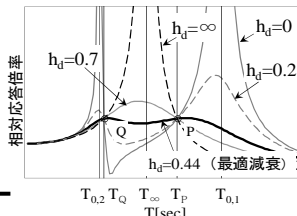


Figure1-2 The properties of the invariant point theory

定点理論は, Figure1-2 のように  $h_d=0$  と  $h_d=\infty$  の共振曲線の交点である P 及び Q の振幅値が減衰係数を変化させても一定値として存在し, 両者の振幅値が等しく, かつ最大となるときを最適とするものである.

ここでは固有値解析を介して最適設計を行うための最適式を誘導していく. まず,  $h_d = \infty$  の時,  $m' = 0, x = x_d$  であるので(1-1)式の第 1 式は(1-3)式, (1-4)式のようになる.

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \kappa_k)x = -\ddot{y} \quad (1-3)$$

$$\therefore \left(\frac{\omega_\infty}{\omega_0}\right)^2 = \lambda_\infty^2 = \left(\frac{T_0}{T_\infty}\right)^2 = 1 + \kappa_k \quad (1-4)$$

また,  $h_d=0$  の時, 特性方程式は(1-5)式のようになる.

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - \left\{\left(\frac{1}{\eta_d} + 1\right)\kappa_k + 1\right\} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{\kappa_k}{\eta_d} = 0 \quad (1-5)$$

(1-5)式から,  $h_d = 0$  の場合の 1 次と 2 次の根を  $(\omega_{0,1}/\omega_0)$ ,  $(\omega_{0,2}/\omega_0)$  とすると, その積は(1-6)式のようになる.

$$\left(\frac{\omega_{0,1}}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_{0,2}}{\omega_0}\right)^2 = \lambda_{0,1}^2 \lambda_{0,2}^2 = \frac{\kappa_k}{\eta_d} \quad (1-6)$$

ここで,  $\kappa_k$  を「付加剛比」と呼ぶことにする. Fig1-1 のモデルの相対変位応答倍率は(1-7)式となる.

$$\left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\frac{c^2 + h_d^2 d^2}{a^2 + h_d^2 b^2}} \quad \text{相対変位応答倍率} \quad (1-7)$$

$$a = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - \left(1 + \kappa_k + \frac{\kappa_k}{\eta_d}\right) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{\kappa_k}{\eta_d}$$

$$b = \frac{2}{\eta_d} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \left\{1 + \kappa_k - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}$$

$$c = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{\frac{\kappa_k}{\eta_d} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}, d = \frac{2}{\eta_d} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3$$

$h_d = 0, h_d = \infty$  の応答倍率の交点 P, Q の関係から, (1-8)式が成り立つ.

$$\left|\frac{c}{a}\right| = \left|\frac{d}{b}\right| \quad \text{相対変位応答倍率} \quad (1-8)$$

定点 PQ の振動数比は(1-8)式から, (1-4), (1-6)式の関係を利用することで(1-9)式のように求められる.

$$\left(\frac{\omega_{P,Q}}{\omega_0}\right)^2 = \lambda_{P,Q}^2 = \frac{1}{2} A \pm \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - 4B}$$

$$A = \lambda_\infty^2 + \lambda_{0,1}^2 \lambda_{0,2}^2 \quad \text{定点振動数比} \quad (1-9)$$

$$B = \frac{1}{2} \lambda_{0,1}^2 \lambda_{0,2}^2 (1 + \lambda_\infty^2)$$

最適同調は, 2 つの定点の応答倍率が同一となる時であるので, 相対変位応答倍率に対して(1-10)式が成り立つ.

$$\left| \frac{d}{b} \right|_p = \left| \frac{d}{b} \right|_q \quad \text{: 相対変位応答倍率} \quad (1-10)$$

(1-10)式から, 最適同調となる定点の振動数比の関係式は(1-11)式ようになる,

$$\lambda_\infty^2 = \frac{2\lambda_p^2 \lambda_q^2}{\lambda_p^2 + \lambda_q^2} \quad \text{: 相対変位の最適同調式} \quad (1-11)$$

(1-11)式に, (1-9)式の関係代入すると, (1-12)式が得られる.

$$\omega_\infty = \sqrt{\omega_{0,1} \omega_{0,2}} \text{ または, } T_\infty = \sqrt{T_{0,1} T_{0,2}} \quad (1-12)$$

: 相対変位の最適同調式

(1-12)式は, 1 次及び 2 次の固有周期の相乗平均による最適同調式であり, この「相乗平均則」を満たすように D.M.同調システムのパラメータを決定すればよい.

### 1.3 応答性能と最適減衰式

最適同調時の定点 PQ における応答倍率は, 最適同調時の関係式である(1-11)式と(1-12)式を用いることで, (1-13)式のように求められる.

$$\left| \frac{X}{Y} \right|_{p,q} = \frac{\lambda_q^2 + \lambda_p^2}{\lambda_q^2 - \lambda_p^2} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty^2 + 1}{\lambda_\infty^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2 + \kappa_k}{\kappa_k}} \quad (1-13)$$

: 最適同調時の定点応答倍率

(1-13)式は相乗平均則を満たす定点の応答倍率であり, 「付加剛比」のみにより決定されるという特徴がある. そしてこの  $\kappa_k$  の値は, (1-4)式の関係から非制震の場合と,  $h_d = \infty$  の場合の固有値解析を行うことで求められるので, 付与できる制震性能は, D.M.の値を決定する前に把握することができるということになる. なお, 工学的な観点から, 最適同調時の定点の応答倍率が,  $1/2h$  程度であると仮定して, 最適減衰式を誘導する. 最適粘性減衰定数は, (1-13)式を利用して(1-14)式のように求められる.

$$h_1 = h_2 \approx (0.5 \sim 0.6) \sqrt{\frac{\kappa_k}{2 + \kappa_k}} \quad \text{: 最適粘性減衰定数} \quad (1-14)$$

なお, 「相乗平均則」の物理的意味は次のように解釈できる<sup>1)</sup>. Figure1-2 の P 点は 1 自由度の固有周期  $T_{0,1}$  (or  $T_{0,2}$ ) の無減衰の定点  $T_p$  (or  $T_Q$ ) における応答倍率と, 固有周期  $T_\infty$  の無減衰の定点  $T_p$  (or  $T_Q$ ) における応答倍率が等しいことを意味する. したがって(1-15)式の関係が成立する.

$$\frac{1}{\left(\frac{T_{0,1}}{T_p}\right)^2 - 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{T_\infty}{T_p}\right)^2}, \quad \frac{1}{1 - \left(\frac{T_{0,2}}{T_Q}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{T_\infty}{T_Q}\right)^2 - 1} \quad (1-15)$$

これより, (1-16)式を得る.

$$2T_p^2 = T_{0,1}^2 + T_\infty^2, \quad 2T_Q^2 = T_\infty^2 + T_{0,2}^2 \quad (1-16)$$

一方, P 点と Q 点の応答倍率が同一となる時が最適同調であるので, (1-17)式が成立する.

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{T_\infty}{T_p}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{T_\infty}{T_Q}\right)^2 - 1} \quad (1-17)$$

これに(1-6)式を代入すると(1-12)式の「相乗平均則」を得る. またこの時の応答倍率は(1-17)式に(1-16)式と相乗平均則を代入すると(1-18)式となる.

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{T_\infty}{T_p}\right)^2} = \frac{T_{0,1} + T_{0,2}}{T_{0,1} - T_{0,2}} \quad (1-18)$$

Figure1-2 から, この値は 1 自由度系としての  $T_{0,1}, T_{0,2}$  の共振振幅  $1/2h$  よりより大きいことから, 試行錯誤的に(1-19)式を得る.

$$h_1 = h_2 \approx (0.7 \sim 0.8) \frac{T_{0,1} - T_{0,2}}{T_{0,1} + T_{0,2}} \quad (1-19)$$

これは固有周期の差と和から構成されるところから「差分和則」と呼んでいる.

例題として  $m = 1.0 [\text{ton}], k = 100 [\text{kN/m}], k_d = 100 [\text{kN/m}]$  ( $\kappa_k = 1$ )と設定し, 相対変位応答倍率に対する最適設計を行った. 複素固有値解析を用いて, 最適同調となる D.M.は(1-12)式, 最適減衰となる減衰係数は(1-14)式により決定した. Table1-1 に, モデルの D.M.と固有周期, 減衰定数を示す. Figure1-3 のモデルの応答倍率から定点の応答倍率が等しく, 最適同調できていることが分かる. () 内の値が(1-19)式で係数を 0.7 とした時のものである.

Table1-1 Natural period and viscous damping factors

モデル		モデル1
条件		相対系最適同調
最適設計時応答倍率 (1-13)式		1.732
DM[ton]		0.250
$c_d$ [kNs/m]		4.500
固有周期 [sec]	$T_{0,1}$	0.719
	$T_{0,2}$	0.275
	$T_\infty$	0.444
$T_\infty$ (同調式) / $T_\infty$ (1-12)式		1.000
粘性減衰定数	$h_1$	0.295
	$h_2$	0.295
最適粘性減衰定数 $h$ (1-14)式 ((1-19)式)		0.289(0.312)

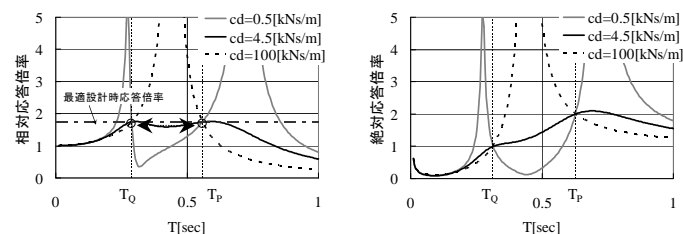


Figure1-3 Resonance curve for the optimum design

### 1.4 まとめ

複素固有値解析を介して最適同調を行うための固有周期の最適同調式, 最適設計時応答倍率と最適減衰式を誘導し, 複素固有値解析のみで, 最高性能の把握, 及びその性能を満たす制震装置の設計が可能であることを示した.

その 1 では, 相対変位に対する最適同調式と最適減衰式を示してきた. その 2 では, 絶対加速度に対する最適同調式と最適減衰式を示していく.

### 【参考文献】

- 1) 石丸辰治, 三上淳治, 秦一平, 古橋剛: D.M.同調システムの簡易設計法, 日本建築学会構造系論文集, 第 75 巻 第 652 号, 2010.6