

凸包を用いた巡回セールスマン問題の一解法

A Method for the Traveling Salesman Problem by Convex Hull

○星野 貴弘¹, 浜松 芳夫¹*Takahiro Hoshino¹, Yoshio Hamamatsu¹

Abstract : In this research, we propose an algorithm by convex hull for the traveling salesman problem(TSP). The proposed algorithm is an improvement of insertion heuristics in convex hull insertion(CHI) method. In order to evaluate the accuracy of solutions obtained using the algorithm, the proposed algorithm and CHI method apply to the benchmark problems. As a result, the proposed algorithm finds shorter tours than CHI.

1. はじめに

本研究は、巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem, 以下 TSP) の近似解法について検討する。TSP とは、いくつかの都市とそれらの間の距離が与えられたとき、すべての都市を一度ずつ通り元の都市まで戻る巡回路のうち、最短となる巡回路を求める問題である。TSP は、輸送システムにおける最短経路の探索やプリント基板のドリル穴空け問題など多くの工学的応用例が存在する重要な問題である。

TSP の最適解を得るには、すべての巡回路とその巡回路長を列挙し、その中から最短となる巡回路を解とすればよい。都市 i から j の距離と都市 j から i の距離が等しい対称 TSP における巡回路の総数は、都市数を N とすると $(N-1)!/2$ となる。したがって、都市数 N の増加により巡回路の総数は、指数関数的に増加するため、上述した方法では現実的な時間内に最適解を得ることは困難である。このような背景から、近似解法などの現実的な時間内に準最適解を得る方法が提案されてきた。TSP の近似解法を大別すると、何も無いところから巡回路を生成する構築法と何らかの巡回路が既に得られているとき、それを最も巡回路長の短い巡回路に改良していく改善法が挙げられる。

構築法の 1 つである Convex Hull Insertion 法 (以下, CHI 法) は、都市の凸包^[1]を初期の巡回路とし、それ以外の都市を最近挿入法により初期巡回路に加えながら巡回路を構築する方法である。凸包とは、与えられた点の集合に対して、それらをすべて含む最小面積の凸多角形のことである。本研究では、CHI 法における都市の挿入方法を改良した解法を提案する。また、TSP のベンチマーク問題に対して CHI 法と提案手法の求解精度を比較し、提案手法の有用性を検討する。

2. TSP と CHI 法について

提案手法のアルゴリズムを説明するにあたり、その基となる CHI 法のアルゴリズムの概要について述べる。CHI 法では、まず、各都市の凸包を求め、凸包の

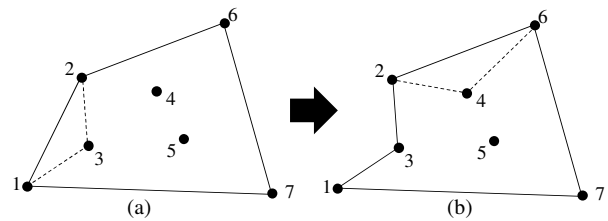


Fig. 1: Convex hull insertion algorithm

頂点集合を初期巡回路とする。Fig.1 のような 7 都市問題では、(a) の実線部が初期巡回路となる。また、巡回路にない都市の追加方法以下の通りである。

1. 部分巡回路上の連続した都市を i, j とし、部分巡回路上にない都市を k とするとき、追加コスト $c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$ を求める。
2. 1 で求めたコストを最小にする都市 i, j 間に都市 k を追加する。

Fig.1 では、都市 3 を都市 1,2 間に追加するコストが最小であれば、新たな巡回路は (b) のようになる。上記の追加操作をすべての都市が部分巡回路に加わるまで行い、最終的な巡回路を構築する。

3. 提案手法

CHI 法は、追加コスト $(c_{ik} + c_{kj} - c_{ij})$ が最小となる都市から順に部分巡回路に加えていくため、部分巡回路上の都市が多くなるにつれて、追加コストが大きくなりやすい。そこで、提案する解法では、追加コストにしきい値を設け、しきい値により都市の追加方法を変更する。提案手法は、CHI 法と同様に各都市の凸包を初期巡回路とするため、以下に、初期巡回路構築以降のアルゴリズムを示す。また、Fig.2 に 10 都市問題の追加例を示す。

1. CHI 法の手順 1 と同様の操作を行う。
2. 1 で求めた値がしきい値 T 以下であれば、都市 k を追加した巡回路を新たな部分巡回路 S_p とし、1

1:日大理工・教員・電気

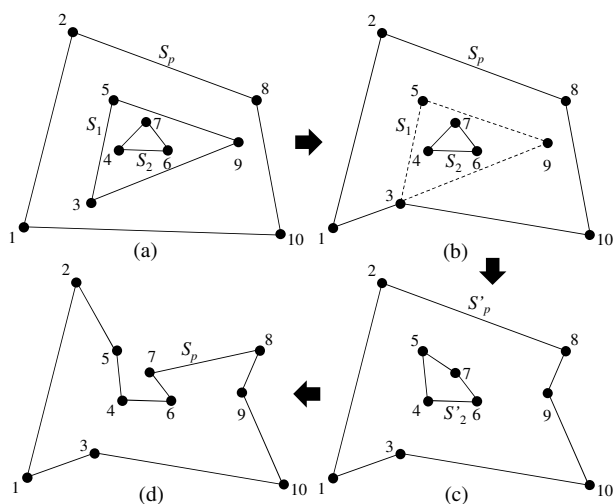


Fig. 2: Algorithm of proposal method

の操作に戻り、超える場合には 3 の操作を行う。

3. 部分巡回路内の都市の凸包を生成し、その頂点集合を内部巡回路 S_1 とし、さらに内部の凸包の頂点集合を最内部巡回路 S_2 とする (Fig.2(a)).
4. 内部巡回路上の都市 k に対して、 S_p および S_2 への最小追加コストをそれぞれ求める。追加コストがより小さい巡回路に都市 k を追加し、新たにできた巡回路を S'_p, S'_2 とする (Fig.2(b)).
5. 内部巡回路の都市が部分巡回路または最内部巡回路にすべて追加されるまで 4 の操作を繰り返す (Fig.2(c)).
6. 最内部巡回路上の連続した都市を l, m とするとき、追加コスト $c_{il} + c_{jm} - c_{ij} - c_{lm}$ を最小とする位置に最内部巡回路を部分巡回路に繋げ (ij, lm の枝を削除し、 il, jm を繋げる)、新たな部分巡回路 S_p とする (Fig.2(d)).
7. すべての都市を通過する S_p ができるまで、1 から 6 の操作を繰り返す。

4. 性能評価および考察

CHI 法との比較により、有効性の検討を行う。

<ベンチマーク問題> 得られた解 (巡回路) の近似度を評価基準とするために、既に最適解 (最短巡回路) が得られている TSP LIB のベンチマーク問題を用いる。本実験では、ベンチマーク問題の中の 51 都市問題 (eil51) および 76 都市問題 (eil76) を対象とした。

<実験結果> Fig.3 に、eil51 に対して、CHI 法としきい値 $T = 2$ とした提案手法を用いて得られた結果を示す。図中の○印は都市、実線は巡回路を示してある。Fig.3 より、CHI 法に対し、提案手法の解は、最適解

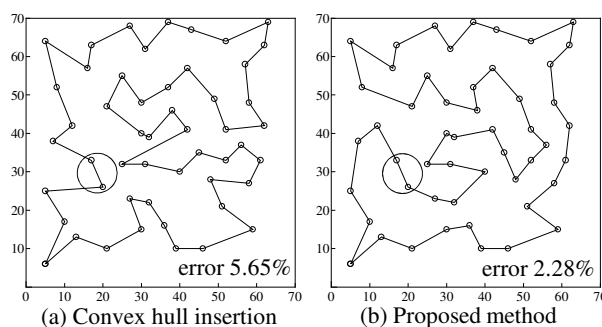


Fig. 3: Solutions of each method

に対する誤差率が改善されていることがわかる。これは、しきい値を設け、最内部巡回路上の複数都市を追加することにより、追加コストの増加が抑えられたためである。Fig.3 で、都市の巡回方法にコストの減少が顕著に現れている部分を○で囲み示してある。

次に、eil51 および eil76 に対して、CHI 法、 $T = 1, 2, 3, 4$ として提案手法を用いた際の誤差率を Table.1 に示す。表より、eil51, eil76 共に提案手法は、CHI 法に比べて誤差率が改善されていることがわかる。また、提案手法の誤差率は、設定するしきい値に依存するものの、今回用いたしきい値では、CHI 法より誤差率を減少させることができた。また、しきい値を $T = 5$ 以上とした場合には、提案手法の誤差率は増加していき、eil51 では $T = 13$ 以上、eil76 では $T = 12$ 以上でしきい値を超えることが無くなるため、CHI 法の解と提案手法の解は同じになった。

Table. 1: Error rate of each method [%]

Method	CHI	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
eil51	5.65	2.96	2.28	2.61	2.63
eil76	6.15	5.25	3.12	2.11	2.11

5. むすび

本研究では、TSP 問題の近似解法である CHI 法を基に都市の挿入方法を改善した解法の提案および検討を行った。TSP LIB のベンチマーク問題に対し、提案手法を適用した結果、CHI 法に比べて提案手法は求解精度が高いことを明らかにした。ただし、都市数を増加させた場合、凸包を構築する操作の回数が増加するため、提案手法の計算時間は増加することが予想される。この点に関しては、今後の検討課題である。

参考文献

- [1] M. ドバーク・M. ファンクリベルド・M. オーバマーズ・O. シュワルツコップ:「コンピュータ・ジオメトリ」, 近代科学社 (2000)