

**(2+1) 次元  $SL(N, \mathbb{C})$  Yang-Mills 理論と Karabali-Nair 変数**  
**(2+1)-dimensional  $SL(N, \mathbb{C})$  Yang-Mills theory and Karabali-Nair variable**

○鈴木隆史<sup>1</sup>, 出口真一<sup>2</sup>\*Takafumi Suzuki<sup>1</sup>, Shinichi Deguchi<sup>2</sup>

Abstract : The Karabali-Nair formalism of  $SU(N)$  Yang-Mills theory in (2+1)-dimensions is reformulated based on the  $SL(N, \mathbb{C})$  Yang-Mills theory in (2+1)-dimensions.

## 1. 導入

(2+1) 次元  $SU(N)$  Yang-Mills (YM) 理論の解析的な研究として, Karabali と Nair による興味深い研究がある. 彼らは, 新たな変数として Karabali-Nair (KN) 変数を定義し, KN 変数を用いて (2+1) 次元  $SU(N)$  YM 理論を書き換えた [1]. さらに, 彼らは KN 変数で書かれた YM 理論の正準量子化を行い, 線形ポテンシャルのストリングテンションを解析的に導いた [2]. その値は数値シミュレーションの結果とほぼ一致している. また, Leigh 達は Karabali-Nair の方法をグルーボールの質量計算に適用して, 数値シミュレーションの結果に近い値を得た [3]. 一方, 福岡達は KN 変数で記述されたラグランジアン of 段階で局所相殺項を加え, 量子論的效果を取り入れた [4]. しかし, 福岡達は局所相殺項を対称性などから予想して定めており, この量子論的效果の取り入れ方に改善の余地があると考えられる. そこで, 我々はより自然な方法で量子論的效果を取り入れるために,  $SU(N)$  YM 理論を  $SL(N, \mathbb{C})$  YM 理論へ拡張する.

まず, 我々は  $SL(N, \mathbb{C})$  YM 理論の解析的な研究を行い, ゲージ不変な YM 場のラグランジアンを構成する [5]. このゲージ不変なラグランジアンは YM 場と KN 変数の両方を用いることで構成される. このことから, KN 変数が  $SL(N, \mathbb{C})$  YM 理論の中に必然的に現れることがわかる. ここで, 空間座標として複素座標系を採用し, 本研究で重要となる axial-like ゲージを用いてゲージ固定をする. その後, 経路積分量子化法を用いて有効作用を求め, この有効作用を基にシュレディンガー方程式を導き, 先行研究の結果と比較・検討する.

2.  $SL(N, \mathbb{C})$  YM 理論

$SL(N, \mathbb{C})$  の生成子を  $\{t_A\}$  とする. この  $\{t_A\}$  を  $\{t_A\} = \{t_a, t_\alpha\}$  ( $a, \alpha = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ ) と分けて,  $t_\alpha = it_a$  と選ぶ. ただし, 生成子  $\{t_a\}$  は交換関係  $[t_a, t_b] = if_{ab}^c t_c$  とエルミート性  $t_a^\dagger = t_a$  を満たす ( $f_{ab}^c \in \mathbf{R}$ ). このとき,  $SL(N, \mathbb{C})$  のリー代数  $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$  の任意の元  $\hat{X}$  は

$$\hat{X} = -i(\hat{X}^a + i\hat{X}^\alpha)t_a \quad (\hat{X}^a, \hat{X}^\alpha \in \mathbf{R}) \quad (1)$$

と展開される. ただし,  $\hat{X}^\alpha t_a \equiv \sum_{\alpha=1}^{N^2-1} \hat{X}^\alpha t_a$  である. この式から,  $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$  は  $SU(N)$  のリー代数  $\mathfrak{su}(N)$  の複素化であることがわかる.

$SL(N, \mathbb{C})$  の任意の元  $g$  に対して, 随伴表現  $\mathbb{D}(g)$  は

$$gt_Ag^{-1} = t_B \mathbb{D}_A^B(g) \quad (\mathbb{D}_A^B(g) \in \mathbf{R}) \quad (2)$$

と定義される.

YM 場  $\mathcal{A}_\mu$  を非コンパクト群  $SL(N, \mathbb{C})$  のリー代数  $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$  の元として導入すると, YM 場  $\mathcal{A}$  は

$$\mathcal{A}_\mu = -iA_\mu^A t_A \quad (A_\mu^A \in \mathbf{M}^3) \quad (3)$$

と展開される ( $\mathbf{M}^3$ : 3次元ミンコフスキー空間). このとき,  $\mathcal{A}_\mu$  のゲージ変換は

$$\mathcal{A}'_\mu = g\mathcal{A}_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \quad (4)$$

と与えられる. 場の強さ  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  は  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$  と定義される. また,  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  のゲージ変換は

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = g\mathcal{F}_{\mu\nu}g^{-1} \quad (5)$$

となる.

いま,  $(N^2 - 1)$  次元剰余類多様体  $\mathfrak{C} \equiv SL(N, \mathbb{C})/SU(N)$  を考える. 我々は,  $\mathfrak{C}$  上の局所座標の集合を  $(\phi^i)$  と表す. この  $\phi^i$  ( $i = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ ) は  $\mathbf{M}^3$  上の実スカラー場として振る舞う:  $\phi^i = \phi^i(x)$ . 左から  $g$  を作用させたとき, 剰余類の表現  $V(\phi^i) [\in SL(N, \mathbb{C})]$  は

$$g(x)V(\phi^i(x)) = V(\phi'^i(x))h(V(\phi^i(x)), x) \quad (6)$$

と変換する. ただし,  $h$  は部分群  $SU(N)$  の元である.

いま, 我々はエルミートな変数 (KN 変数) を

$$H \equiv VV^\dagger \quad (7)$$

と定義する. 式 (6) から,  $H$  のゲージ変換は

$$H' = gHg^\dagger \quad (8)$$

と得られる. 式 (8) と同様の変換をするように  $H$  の共変微分を

$$\mathcal{D}_\mu H \equiv \partial_\mu H + \mathcal{A}_\mu H + H\mathcal{A}_\mu^\dagger \quad (9)$$

<sup>1</sup> 日大理工・院・量子 <sup>2</sup> 日大・量科研

と定義する. 実際に, 式 (4) と式 (8) から共変微分のゲージ変換が求まる:

$$\mathcal{D}'_\mu H' = g(\mathcal{D}_\mu H)g^\dagger. \quad (10)$$

### 3. ラグランジアン

YM 場  $\mathcal{A}_\mu^A$  のラグランジアン  $\mathcal{L}_A$  は  $SL(N, \mathbb{C})$ YM 理論によるゲージ変換のもとで不変でなければならない. そのような  $\mathcal{L}_A$  は YM 場  $\mathcal{A}_\mu^A$  だけで構成することはできず, KN 変数  $H$  を用いる必要がある. 実際に, 場の強さ  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  と  $H$  から我々は  $\mathcal{L}_A$  を

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2e^2} \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} H \mathcal{F}^{\mu\nu\dagger} H^{-1}) = -\frac{1}{4e^2} G_{AB} \mathcal{F}_{\mu\nu}^A \mathcal{F}^{\mu\nu B} \quad (11)$$

と構成する. ただし,

$$G_{AB} \equiv \text{tr}(t_A H t_B^\dagger H^{-1}) + \text{tr}(t_B H t_A^\dagger H^{-1}) \quad (12)$$

である. 式 (8) と式 (5) から,  $\mathcal{L}_A$  がゲージ不変であることがすぐに示される.

次に,  $\mathcal{L}_A$  と同様にゲージ不変となるように実スカラー場  $\phi^i$  のラグランジアン  $\mathcal{L}_\phi$  を構成する. このような  $\mathcal{L}_\phi$  は  $H$  と  $\mathcal{A}_\mu$  を用いて, 次のように構成される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= \frac{M^2}{4} \text{tr}[(\mathcal{D}_\mu H)H^{-1}(\mathcal{D}^\mu H)H^{-1}] \\ &= \frac{M^2}{4} \text{tr}[J_\mu J^\mu - 2J_\mu A^\mu - 2(J_\mu A^\mu)^\dagger \\ &\quad + \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu + (\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu)^\dagger + 2\mathcal{A}_\mu H \mathcal{A}^{\mu\dagger} H^{-1}]. \end{aligned} \quad (13)$$

ただし,  $M^2$  は質量次元をもつ定数であり,  $J_\mu \equiv -(\partial_\mu H)H^{-1}$ ; と定義した. 式 (8) と式 (10) から,  $\mathcal{L}_\phi$  もゲージ不変であることがわかる.

### 4. 複素座標と axial-like ゲージ

我々は空間座標  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  に対して複素座標  $z \equiv x^1 + ix^2$ ,  $\bar{z} \equiv x^1 - ix^2$  を定義する. このことに対応して, 我々は微分演算子  $\partial_z = (\partial_1 - i\partial_2)/2$ ,  $\partial_{\bar{z}} = (\partial_1 + i\partial_2)/2$  と YM 場

$$\mathcal{A}_z \equiv (\mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2)/2, \quad \mathcal{A}_{\bar{z}} \equiv (\mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2)/2 \quad (14)$$

を導入する.

ここで, 我々はゲージ固定条件として axial-like ゲージ

$$\mathcal{A}_{\bar{z}} = 0 \quad (15)$$

を選ぶ.

このように複素座標系を導入しゲージ固定条件として式 (15) を選ぶと, ラグランジアン (11) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= \frac{2}{e^2} \hat{G}_{ab} (\mathcal{D}_0^+ \mathcal{A}_z^{+a} \mathcal{D}_0^- \mathcal{A}_{\bar{z}}^{-b} - 2\partial_{\bar{z}} \mathcal{A}_z^{+a} \partial_z \mathcal{A}_{\bar{z}}^{-b} \\ &\quad - \partial_z \mathcal{A}_0^{+a} \mathcal{D}_0^- \mathcal{A}_{\bar{z}}^{-b} - \mathcal{D}_0^+ \mathcal{A}_z^{+a} \partial_z \mathcal{A}_0^{-b} \\ &\quad + \partial_z \mathcal{A}_0^{+a} \partial_z \mathcal{A}_0^{-b} + \partial_{\bar{z}} \mathcal{A}_0^{+a} \partial_z \mathcal{A}_0^{-b}) \end{aligned} \quad (16)$$

と書き換えられる. ただし,  $\hat{G}_{ab} \equiv \text{tr}(t_a H t_b H^{-1})$ ,  $\mathcal{A}_{\bar{z}}^{\pm a} \equiv \mathcal{A}_z^a \pm i\mathcal{A}_{\bar{z}}^a$ ,  $\mathcal{A}_{\bar{z}}^{\pm a} \equiv (\mathcal{A}_{\bar{z}}^{\mp a})^*$ ,  $\mathcal{D}_0^\pm X^a \equiv \partial_0 X^a + f_{bc}^a \mathcal{A}_0^{\pm b} X^c$  を定義した.

同様に, ラグランジアン (13) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= \frac{M^2}{4} \text{tr}[J_0 J_0 - 2J_0 \mathcal{A}_0 - 2(J_0 \mathcal{A}_0)^\dagger + \mathcal{A}_0 \mathcal{A}_0 + (\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_0)^\dagger \\ &\quad + 2\mathcal{A}_0 H \mathcal{A}_0^\dagger H^{-1} - 4J_z J_{\bar{z}}] - M^2 (J_{\bar{z}}^{+a} \mathcal{A}_z^{+a}/2 \\ &\quad + J_z^{-a} \mathcal{A}_{\bar{z}}^{-a}/2 + \hat{G}_{ab} \mathcal{A}_z^{+a} \mathcal{A}_{\bar{z}}^{-b}) \end{aligned} \quad (17)$$

となる. ただし,  $J_{\bar{z}}^{+a} \equiv J_z^a + iJ_{\bar{z}}^a$ ,  $J_z^{-a} \equiv (J_{\bar{z}}^{+a})^*$  である.

我々はラグランジアン  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\phi$  を基に量子論的効果を取り入れた有効作用を求める. 実際には,  $\mathcal{A}_z^{+a}$ ,  $\mathcal{A}_{\bar{z}}^{-a}$  を量子論的に扱い,  $\mathcal{A}_z^{+a}$ ,  $\mathcal{A}_{\bar{z}}^{-a}$  に関する経路積分を実行し  $\mathcal{A}_0$  および  $H$  に関する有効作用を求める. この有効作用からハミルトニアンを求め, シュレディンガー方程式を導出する. このようにして得られたシュレディンガー方程式を先行研究の結果と比較・検討する.

### 5. まとめと今後の課題

我々は, より自然な方法で KN 変数で書かれたラグランジアンに YM 場の量子論的効果を取り入れるために,  $SU(N)$ YM 理論を  $SL(N, \mathbb{C})$ YM 理論へ拡張し,  $SL(N, \mathbb{C})$ YM 理論を解析的に調べた. すると, ゲージ不変な YM 場のラグランジアン  $\mathcal{L}_A$  を構成するためには YM 場だけでなく KN 変数も必要であることがわかり,  $SL(N, \mathbb{C})$ YM 理論の中に KN 変数が必然的に現れることが確認された. 次に, 複素座標系を組み, ゲージ固定条件として axial-like ゲージ (15) を選んだ. KN 変数で記述されたラグランジアンを基に  $\mathcal{A}_z^{+a}$ ,  $\mathcal{A}_{\bar{z}}^{-a}$  を量子論的に扱い,  $\mathcal{A}_z^{+a}$ ,  $\mathcal{A}_{\bar{z}}^{-a}$  について経路積分を実行した. これにより得られた有効作用からシュレディンガー方程式を導き, この結果を先行研究と比較・検討した. 今後は, 有効作用を基にストリングテンションなどの様々な物理量を計算することが課題となる.

### 参考文献

- [1] D. Karabali and V. P. Nair, Nucl. Phys. **B464**, 135 (1996).
- [2] D. Karabali, C. Kim and V. P. Nair, Phys. Lett. **B434**, 103 (1998).
- [3] R. G. Leigh, D. Minic and A. Yelnikov, Phys. Rev. **D76**, 065018 (2007).
- [4] M. Fukuma, K. Katayama and T. Suyama, JHEP. **04**, 095 (2008).
- [5] S. Deguchi, Prog. Theor. Phys. **82**, 433 (1989).