

## $\kappa$ -ミンコフスキー時空におけるカシミア効果 Casimir Effect in $\kappa$ -Minkowski Spacetime

木村知寿美<sup>1</sup> 仲滋文<sup>2</sup>

The  $\kappa$ -Minkowski spacetime is known as a limit of quantum gravity. The spacetime is a 5-dimensional deSitter space with radius  $\kappa$ , the inverse of which may be understood as the extension of an internal space. We show that the effect  $\kappa^{-1} \neq 0$  leads to a non-local effect for the fields embedded in that spacetime. In particular, we have discussed the Casimir effect in the  $\kappa$ -Minkowski spacetime, which becomes important for the case of a large extra dimension.

### 1. はじめに

$\kappa$ -ミンコフスキー時空は、半径  $1/\sqrt{\kappa}$  の 5 次元ド・ジッター時空に基づく非可換時空であり、量子重力の古典解と考えられている。この時空での時空座標は、数ではなく Lie 群型の閉じた演算子を構成し、この意味で非可換時空となっている。このような構造を持つ時空は、広がりを持つ素粒子との関連でスナイダーが提唱した時空と同等であるが、現在では量子重力との関連で調べられる事が多い。この時空の 5 番目の自由度は内部空間としての意味を持つが、近年、内部空間が比較的大きいという考え方も提案されており、 $\kappa$ -ミンコフスキー時空では観測可能な効果をもたらすことも期待されている。本論文は、この時空のカシミア効果を通して  $\kappa$ -ミンコフスキー時空構造としての量子重力の痕跡を探る事を目的とする。

### 2. $\kappa$ -ミンコフスキー時空の基本構造

$\kappa$ -ミンコフスキー時空は、交換関係

$$[\hat{x}_0, \hat{x}_i] = -\frac{i}{\kappa} \hat{x}_i \quad (1)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

で特徴付けられる非可換時空である。この交換関係に空間回転の演算子  $M_i$  とローレンツブースト  $N_i$  を付け加える事により、 $SO(4, 1)$  の生成子の全体を決めることができ、5次元ミンコフスキー時空の背景の上に成立している。この時空の平面波は  $x_i$  と  $x_0$  の非可換性を考慮して

$$\hat{e}_k \equiv: e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} := e^{ik\hat{x}} e^{-ik_0 \hat{x}_0} \quad (3)$$

で与えられる。ただし、 $:$  は空間座標を左に、時間座標を右に配置する順序演算子である。定義により、平面波の積  $\hat{e}_k \hat{e}_p = \hat{e}_{kp}$  は波数ベクトルの合成

$$kp \equiv (k_0 + p_0, k_i + e^{-k_0/\kappa} p_i) \quad (4)$$

を導き、結合則は量子群の余積となっている。 $SO(4, 1)$  の生成子  $(\hat{x}_0, \hat{x}_i, \hat{M}_i, \hat{N}_i)$  の下で 5-ベクトルとして変換する

微小変位  $dx^A$ , ( $A = 0, 1, 2, 3, 4$ ) を導入し、

$$d\hat{e}_k = -id x_0 P_0 \hat{e}_k + id \mathbf{x} \cdot \mathbf{P} \hat{e}_k - id x_4 (P_4 - \kappa) \hat{e}_k \quad (5)$$

により平面波の微分としての運動量を定義すると

$$P_0(k_0, \mathbf{k}) = \kappa \sinh \frac{k_0}{\kappa} + \frac{\mathbf{k}^2}{2\kappa} e^{k_0/\kappa} \quad (6)$$

$$P_i(k_0, \mathbf{k}) = k_i e^{k_0/\kappa} \quad (7)$$

$$P_4(k_0, \mathbf{k}) = \kappa \cosh \frac{k_0}{\kappa} - \frac{\mathbf{k}^2}{2\kappa} e^{k_0/\kappa} \quad (8)$$

と求まり、5次元擬球の関係

$$-P_0^2 + \mathbf{P}^2 + P_4^2 \equiv \kappa^2 \quad (9)$$

が確かめられる。この結果  $\hat{e}_k \rightarrow e^{iP(k) \cdot x}$  は、非可換時空の平面波から可換時空の平面波への写像を与え、この写像を基に、可換時空上で非可換時空の場の理論の有効理論を構成する事が出来る。この結果、4次元可換時空の場に対し、以下の意味でのスター積

$$\int d^4 x \phi^\dagger(x) \star \psi(x) = \int d^4 x \phi^*(x) \left(1 - \frac{1}{\kappa} \partial_4\right) \psi(x) \quad (10)$$

ただし、

$$1 - \frac{1}{\kappa} \partial_4 = \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2}} \quad , \quad = (\partial_0^2 - \partial_i \partial^i) \quad (11)$$

を導入する事により非可換時空の有効理論とすることが出来る。例えば、 $\kappa$ -ミンコフスキー時空における質量  $m$  の実(自由)スカラー場の理論は、可換時空の作用

$$\begin{aligned} S &= \int d^4 x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) \star (\partial^\mu \phi)(x) + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi(x) \right) \\ &= \int d^4 x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2}} (\partial^\mu \phi)(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{2} \phi \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2}} \phi(x) \right) \quad (12) \end{aligned}$$

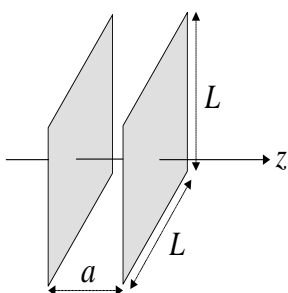
から構成出来る。

<sup>1</sup>日大理工・院・物理

<sup>2</sup>日大理工・教員・物理

### 3. ミンコフスキー時空におけるカシミア効果

カシミア効果は、真空中に 2 枚の平行導板がある場合と無い場合の境界条件の違いで生じる電磁場の零点エネルギーの差により、導板間にはたらく力の事を言う。これを計算するために、図のように配置された 2 枚の導板 ( $L \gg a$ ) を配置する。



上の境界条件の下で、光子の  $x, y$  方向の波数  $\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y)$  は連続値を取り、 $z$  方向の波数は  $k_z = n\pi/a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) となる。このとき、電磁場の零点エネルギーは

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} = \frac{\hbar c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 d^2\mathbf{k}_{\parallel} \left( \sqrt{k_1^2 + k_2^2} + 2\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \right) \quad (13)$$

となる。カシミア効果に寄与するのは上のエネルギー  $E$  と導板が無い場合の零点エネルギー

$$E_0 = \frac{\hbar c}{2} \int \frac{L^2 d^2\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dn 2\sqrt{\mathbf{k}_{\parallel}^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}} \quad (14)$$

との差額で、これを単位面積当たりの値にした  $\mathcal{E} = (E - E_0)/L^2$  は、 $v = a^2 k^2/\pi$  として

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dv \sqrt{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dv \sqrt{v + n^2} - \int_0^{\infty} dv \int_0^{\infty} dn \sqrt{v + n^2} \right] \quad (15)$$

と求まる。この値は発散しているが、 $f(0) = 1$ 、及び  $f(x) \rightarrow 0, (x \rightarrow \infty)$  を満たす切断関数  $f(x)$  を導入し、

$$\int_0^{\infty} dv \sqrt{v + n^2} \rightarrow F(n) = \int_0^{\infty} dv \sqrt{v + n^2} f\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{v + n^2}\right) \quad (16)$$

等の置き換えをすると

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \hbar c \frac{\pi}{4a^3} \left[ \frac{1}{2} F(0) + F(1) + F(2) + \dots - \int_0^{\infty} dn F(n) \right] \\ &= \frac{\hbar c \pi^2}{a^3} \frac{B_4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ここで  $B_4$  はベルヌーイ数であり、 $F(n)$  の和の評価にはオイラー・マクローリンの公式を用いた。(17) から、導板間にはたらく力は  $\mathcal{F} = -\partial\mathcal{E}/\partial a = -\hbar c \pi^2/240a^4$  と求められ、Sparnaary より実験的にカシミア効果として検証された。

### 4. $\kappa$ -ミンコフスキー時空におけるカシミア効果

以下簡単の為に、光子に類似させて質量 0 の実スカラー場におけるカシミア効果を考える。このとき  $\kappa$  が十分大きい事を考慮して  $\sqrt{1 - 1/\kappa} \simeq 1 - 1/2\kappa^2$  と近似し、 $\phi = \phi_1 + \phi_2$ 、( $\phi_1 = (1 - 1/2\kappa^2)\phi, \phi_2 = \phi$ ) と展開すると

$$S \simeq -\frac{1}{2} \int d^4x [\phi_1 \phi_1 - \phi_2 (-2\kappa^2)\phi_2] \quad (18)$$

となる。(18) の右辺第一項は (17) のカシミア効果 ( $\times 1/2$ ) を導く。第二項は虚質量  $m = i\sqrt{2}\kappa$  のタキオン (ゴースト) 場に対応する。これによる真空エネルギーの揺らぎは  $k^2 > \kappa^2$  の安定項のみ取り入れると、

$$\left\langle \frac{E_{tch}}{L^2} \right\rangle_0 \simeq \frac{\hbar c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|\mathbf{k}_{\parallel}| > \sqrt{\kappa}}^{\infty} \frac{d^2\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sqrt{k_{\parallel}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \quad (19)$$

と評価される。このとき発散する  $n$  の和を  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \rightarrow 1/120, (s \rightarrow -3)$  で正則化すると、

$$(19) \leq -\frac{\hbar c}{8\pi} \frac{\kappa^{\frac{3}{4}}}{180} \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \quad (20)$$

となる。

### 5. まとめと今後の課題

以上  $\kappa$ -ミンコフスキー時空でのカシミア効果をスカラー場において検証した。(20) では  $n$  の和の最大評価をしたため (19) の上限値のみが得られたが、その下限を評価する事、また電磁場の場合に拡張する事や、内部空間の大きさの評価に結び付ける事は今後の課題である。

#### 参考文献

- [1] L. Freidel, J. K. Glikman and S. Nowak, Phys. Lett. B **648** (2007) 70-75 .
- [2] J. K. Glikman and S. Nowak, arXiv:hep-th/0304101v3 11 Oct 2003
- [3] L.Freidel, J. K. Glikman and S. Nowak, arXiv:0706.3658v2 [hep-th] 26 Jul 2007
- [4] H. S. Snyder, Phys. Rev vol. **71** (1947), 38-41
- [5] N. A. Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. B **429** (1998) 263-272
- [6] Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap., ser. B, vol. **51**, p.793, 1948. See also M. Frierz, Helv. Phys. Acta, vol. **33**, p. 855
- [7] M. J. Sparnaary, Physica, vol. **24**, p. 751, 1958
- [8] S. Nam, H. Park and Y. Seo, arXiv:hep-th/0304201
- [9] A. Pais and G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev vol. **79** (1950)