

○ 佐藤 洋志*¹ 藤川 和男*²*Yoji Sato*¹, Kazuo Fujikawa*²

Abstract: We discuss quantum information theory and entanglement measure which investigate how the systems are entangled. Entanglement is nonlocality correlation appearing in inseparable composit systems of more than 2 qubits. It is a very important resource for realizing quantum information processing and quantum cryptography. However, all properties of entanglement are not understood yet. A variety of problems exist concerning mixed states.

1. はじめに

エンタングルメントとは、全系が複数の部分系から成る量子系（合成系）において、全系の状態が分離出来ない場合、つまり全系が部分系の直積状態に書き下せない場合に現れる、距離を越えて瞬時に働く非局所的相関である。エンタングルメントは量子力学が誕生してまもなく発見され、1935 年に Schrödinger によって命名された。1980 年代後半になって、不確定性原理、重ね合わせの原理そしてエンタングルメントを用いて情報処理や暗号通信を行う量子情報の分野が誕生し、1990 年代に大きく発展した [2]。

量子情報処理を実現する量子系は、その量子コヒーレンスを保つ必要がある。しかし、初期時刻において系をほぼ純粋状態に用意出来たとしても、系を完全に周りの環境から切り離す事は不可能であるため量子系が環境と相互作用し、量子ビット系ではビットフリップなどが起こる事によって、量子系は混合状態に時間発展する。このような量子系の状態に関する情報が環境との相互作用によって失われてしまう過程を記述する運動方程式（マスター方程式）を求める事は、実際の系を解析する上で必要になる。また量子情報においては、全系の状態が分離可能な系よりも、むしろ分離不可能な系、すなわちエンタングルしている系を扱う事が基本的である。そのため状態がどの程度エンタングルしているのかを定量的に調べる事が出来るエンタングルメント測度が量子情報を研究する上で重要になる。

本研究の目的は、量子系が環境と相互作用する場合の時間発展を記述するマスター方程式を求める事と、エンタングルメントが現れる最も基本的な系である 2 量子ビット系において、全系の状態が純粋状態である場合のエンタングルメント測度を求める事である。

2. 量子ビット

互いに直交している 2 つの状態からなる 2 準位系に、情報を担わせたものを量子ビットという。量子ビットの任意の状態 $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

と書かれる。基底 $|0\rangle, |1\rangle$ は

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

と表現される。また α, β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす複素数である。状態が $|0\rangle$ の時は 0 を、 $|1\rangle$ の時は 1 の情報を符号化する。これより、量子ビット 1 個で 1 ビットの情報を担う事ができ、状態をユニタリー演算子で変化させる事によって量子情報処理が行われる。

3. マスター方程式

古典的な確率的混合という性質をも備えた量子系の状態を混合状態、混合状態でない状態を純粋状態という。混合状態を含めた場合の量子系の状態は密度行列によって記述される。密度行列は

$$\rho(t) = \sum_n \omega_n |n, t\rangle \langle n, t| \quad (3)$$

と定義される。ここで ω_n は状態が $|n, t\rangle$ である古典的確率である。量子系が環境と相互作用しない場合、 $|n, t\rangle$ は Schrödinger 方程式に従って時間発展するので、密度行列は $\rho(0) = \sum_n \omega_n |n, 0\rangle \langle n, 0|$ を初期状態として、

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = -[\rho(t), H] \quad (4)$$

のように時間発展する。次に量子系が環境（熱浴）と弱い相互作用をし、時間と共に量子コヒーレンスが失われていく場合の時間発展を求める。量子系、熱浴、相互作用のハミルトニアンをそれぞれ H_S, H_B, H_I とする。熱浴は十分大きく、量子系との相互作用による時間発展の影響は十分小さいと考え、熱浴の状態は変化しないとする。初期状態を $\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B$ とし、全系のハミルトニアンを $H_{Total} = H_S + H_B + H_I$ とする。このとき全系は $i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = -[\rho(t), H_{Total}]$ に従って時間発展する。 $H_0 = H_S + H_B$ と定義したとき、相互作用表示

$$\tilde{H}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} H e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \quad (5)$$

$$\tilde{\rho}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \rho e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \quad (6)$$

*¹ 日大理工・院・量子*² 日大・教員・量科研

をとると、全系の運動方程式は

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = -[\tilde{\rho}(t), \tilde{H}_I] \quad (7)$$

となる。この式を時間で積分し、得られた $\tilde{\rho}(t)$ を (7) 式に戻すと

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_I(t), \tilde{\rho}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]] \quad (8)$$

が得られる。ここで熱浴の自由度に対してのみトレースをとり、 $Tr_B(\tilde{H}_I(t)\tilde{\rho}_B) = 0$ を仮定すると注目している量子系だけの時間発展を表すマスター方程式が得られる。 $\tilde{\rho}_S(t) = Tr_B(\tilde{\rho}(t))$ と書くと (8) 式は

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_B([\tilde{H}_I(t), [\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}(t')]]) \quad (9)$$

となる。このマスター方程式によって、量子系が環境と弱い相互作用をし、量子コヒーレンスが乱され、系が混合した状態となっていく過程が記述される。

4. エンタングルメント測度

最初にエンタングルした状態を定義する。2量子ビットからなる全系の状態 ρ が一般に

$$\rho = \sum_n c_n \rho_n \otimes \sigma_n \quad (10)$$

の形で書ける場合を分離可能な状態、書き下せない場合をエンタングルした状態と定義する。ここで n は 2量子ビット系の可能な量子状態を記述する量子数、 ρ_n, σ_n はそれぞれの系の対応する密度行列、 c_n は 1 以下の正の実数である。特にある c_n が 1 他は全て 0 の時が 純粋状態に対応する。

2量子ビット系におけるエンタングルメント測度を求めるために、全系の状態が分離可能な純粋状態である場合とエンタングルした純粋状態である場合について考察する。初めに全系の状態が

$$\rho = |\phi\rangle\langle\phi| = \rho_A \otimes \sigma_B \quad (11)$$

$$|\phi\rangle = |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad (12)$$

という分離可能な純粋状態である場合を考える。量子ビット A と B の縮約した密度行列 ρ_A, σ_B をそれぞれ求めると

$$\rho_A = Tr_B(\rho) = |0\rangle\langle 0|_A \quad (13)$$

$$\sigma_B = Tr_A(\rho) = |1\rangle\langle 1|_B \quad (14)$$

となり、 A と B は共に純粋状態である事が分かる。次に全系の状態が

$$\rho' = |\Psi\rangle\langle\Psi| \neq \rho'_A \otimes \sigma'_B, \quad (15)$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \quad (16)$$

というエンタングルした純粋状態である場合を考える。量子ビット A と B の縮約した密度行列 ρ'_A, σ'_B をそれぞれ求めると

$$\rho'_A = Tr_B(\rho') = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_A + |1\rangle\langle 1|_A) \quad (17)$$

$$\sigma'_B = Tr_A(\rho') = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_B) \quad (18)$$

となり、 A と B は共に混合状態である事が分かる。これより、量子ビット A もしくは B の縮約した密度行列が純粋状態ならば A と B はエンタングルしていない事になり、混合状態ならば A と B はエンタングルしている事になる。つまり、 A もしくは B の (縮約した) 状態がどの程度混合しているのかを測る事によって、2量子ビット間がどの程度エンタングルしているのかを定量化する事が出来る。以下では全系の状態が純粋状態である場合において、縮約した後の各系の von Neumann エントロピー

$$S(\rho_j) = -Tr(\rho_j \log_2 \rho_j) \quad (j = A, B) \quad (19)$$

がエンタングルメント測度と成り得る事を示す。

量子ビット A もしくは B の状態が

$$\rho_j = \lambda|0\rangle\langle 0|_j + (1-\lambda)|1\rangle\langle 1|_j \quad (0 < \lambda < 1) \quad (20)$$

という混合状態であるとき、von Neumann エントロピーを求めると

$$S(\rho_j) = -\lambda \log_2(\lambda) - (1-\lambda) \log_2(1-\lambda) \quad (21)$$

となる。 $\lambda \rightarrow 0$, または $\lambda \rightarrow 1$ のとき、 $S(\rho_j) = 0$ となりエントロピーは最小値をとる。このとき状態は全く混合していない純粋状態に成る。 $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき、 $S(\rho_j) = 1$ となりエントロピーは最大値をとる。これは状態が最大に混合している事を意味する。 λ がそれ以外のときは $0 < S(\rho_j) < 1$ となり、混合状態に成っている。以上より、von Neumann エントロピーは状態がどの程度混合しているのかを測る事が出来るものであり、エンタングルメント測度として成り得る事が分かった。

5. まとめと今後の課題

デコヒーレンスの過程を記述するマスター方程式を求め、また 2量子ビット系におけるエンタングルメント測度として von Neumann エントロピーを求める事が出来た。しかし、今回求めたエンタングルメント測度は、デコヒーレンスが起これば全系の状態が常に純粋状態である場合に対しての測度であり、デコヒーレンスが起これば全系の状態が混合状態に時間発展した場合に対しては適用出来ない。そのため、今後の課題は全系の状態が混合状態である場合に対しても適用出来るエンタングルメント測度を求める事である。また連続変数の場合に対するエンタングルメント測度の考察も行いたい。

参考文献

- [1] 根本香絵:「量子力学の考え方 物理で読み解く量子情報の基礎」, (サイエンス社, 2009).
- [2] 村尾美緒:「エンタングルメント 量子の世界のみちしるべ」, 数理科学, vol.500, (サイエンス社, 2005).
- [3] A.Einstein, B.Podolsky and N.Rosen, Phys. Rev. 47,777 (1935) .