O-39

ツイスター量子化における Hilbert 空間 II

Hilbert space for Twistor quantization II

○野手順一[1]，出口真一[2]

Jun-ichi Note, Shinichi Deguchi

Abstract: Penrose has propounded twistor quantization in 1968 to originate quantum theory of the twistor formulation. To construct Hilbert space in this formulation, Penrose defined an inner product of functions on twistor space (so-called twistor functions). However, in this Hilbert space, properties of the norm and the domain of definition of the adjoint operator are unclear. To make clear properties of the Hilbert space, we propose a new definition of inner product of the twistor functions. It is shown that the norm proposed here is positive definite or indefinite depending on the singularities of the twistor function. The domain of definition of the adjoint operator is also clarified.

１．はじめに

ツイスター理論は，1967 年に Penrose によって創始された [1]．この動機は，重力場の量子論への１つのアプローチであるが，まだ完成には至っていない．この理論で導入するツイスター空間の１点（ナルツイスター）は，Minkowski 空間の１本の光線に対応する．そして，ツイスター空間の１本の直線には，Minkowski 空間の１点が対応する．このように，ツイスター空間と Minkowski 空間には対応関係がある．この理論の観点からすれば，Penrose が主張しているように，相対論を記述する空間として，Minkowski 空間よりもツイスター空間が基本的であると考えられる．この考え方に基づいて，この理論では，Minkowski 空間における物理法則をツイスターを用いて書き換えて，ツイスター空間で解析を行う．

ツイスター理論の主な利点として次のようなものが挙げられる．まず，ツイスター空間は４次元複素線形空間 $\mathbb{C}^4$ であるから，物理法則を複素幾何学に基づいて解析することができる．このことにより，いくつかの新しい視点と新たな技術的手法がもたらされる．さらに，ツイスターを用いると，無質量系がもつ共形不変性を簡潔に記述することができる [2]．

２つの Weyl スピノル $(\pi_{\dot\alpha})_{\dot\alpha=\dot0,\dot1}$ と $(\omega^{\alpha})_{\alpha=0,1}$ の組を次のように表すことにする：

$$Z^A=(\,\omega^\alpha\,,\,\pi_{\dot\alpha}\,),\quad A=0,1,2,3\,. \tag{1}$$

但し，ω^α と $\pi_{\dot\alpha}$ は，$\omega^\alpha=i\,x^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}$ という関係式で結ばれている．ここで，$(\,x^{\alpha\dot\alpha})_{\alpha=0,1\,;\,\dot\alpha=\dot0,\dot1}$ は Minkowski 空間の座標 $(\,x^\mu\,)_{\mu=0,1,2,3}$ のスピノル表現である．それから，ω^α と $\pi_{\dot\alpha}$ の複素共役の組を

$$\overline{Z}_A=(\,\overline{\pi}_\alpha\,,\,\overline{\omega}^{\dot\alpha}\,),\quad A=0,1,2,3 \tag{2}$$

（ここで $\overline{\omega}^{\dot\alpha}$，$\overline{\pi}_\alpha$ はそれぞれ ω^α，$\pi_{\dot\alpha}$ の複素共役である）と表すことにする．このとき，$\overline{Z}_AZ^A=0$ が成立するので，Z^A はナルツイスターとよばれる．

今，ナルでないツイスターを扱うために Minkowski 空間の座標を複素数 $z^\mu=x^\mu+i\,y^\mu$ (x^μ,y^μ：実数) に拡張した複素 Minkowski 空間を導入する．そして一般のツイスター Z^A に関しては，$\omega^\alpha=i\,z^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}$ であると考え直す．このとき，$\overline{Z}_AZ^A=-2y^{\alpha\dot\alpha}\overline{\pi}_\alpha\pi_{\dot\alpha}$ となる．さらに，$\overline{Z}_AZ^A$ は標準形にすると

$$\overline{Z}_AZ^A=|a^0|^2+|a^1|^2-|a^2|^2-|a^3|^2 \tag{3}$$

と書ける．但し，$a^A(A=0,1,2,3)$ は Z^A を線形変換した変数である．式 (3) の Hermite 形式 $\overline{Z}_AZ^A$ は非正定値であるから，ツイスター空間は符号数 (2, 2) の非正定値空間であることがわかる．また，$\overline{Z}_AZ^A$ を不変に保つ Z^A の線形変換は，Minkowski 空間座標の非線形な共形変換に対応する．

[1]日大理工・院・量子
[2]日大・教員・量科研

2．ツイスター量子化

相対論において，４元運動量 p_μ をもつ無質量粒子のヘリシティ（スピン）s は $S_\mu = sp_\mu$ により与えられる（但し，S_μ は Pauli-Lubanski スピンベクトルである）．このヘリシティs はツイスターを用いると

$$s = \frac{1}{2}\,\overline{Z}_A Z^A \tag{4}$$

と簡潔かつ共形不変性を明白に記述できる．

ツイスター変数は次の交換関係を設定することにより量子化される：

$$[\,\hat{Z}^A, \hat{\overline{Z}}_B\,] = \delta^A_B\,, \quad \text{others} = 0. \tag{5}$$

これをもとにして，共形群の Lie 代数を再現することができる．演算子 $\hat{Z}^A$ を対角化する表示では，これらの演算子は

$$\hat{Z}^A \doteq Z^A\,, \quad \hat{\overline{Z}}_A \doteq -\frac{\partial}{\partial Z^A} \tag{6}$$

と表現できる [2]．式 (4) と式 (6) より，ヘリシティ演算子は，Weyl 順序を採用すれば

$$\hat{s} = \frac{1}{4}(\hat{Z}^A\hat{\overline{Z}}_A + \hat{\overline{Z}}_A\hat{Z}^A) \doteq -\frac{1}{2}Z^A\frac{\partial}{\partial Z^A} - 1 \tag{7}$$

と表わされる．この演算子の固有値 s に属する固有関数 $f(Z^A)$（ツイスター関数とよばれる）は $(-2s-2)$ 次斉次式であることがわかる．ツイスター関数 $f(Z^A)$ に１価性を要求すると，ヘリシティs は量子化されて半整数または整数となる．

ツイスター関数 $f(Z^A)$ を積分変換することにより，無質量自由場方程式 $\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\phi_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}_2\cdots\dot{\alpha}_{2s}} = 0\,(s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots.)$ の正エネルギー解を構成することができる：

$$\phi_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cdots\dot{\alpha}_{2s}}(z) = \oint_{C_z} \pi_{\dot{\alpha}_1}\pi_{\dot{\alpha}_2}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_{2s}} f(Z^A)\pi_{\dot{\delta}}d\pi^{\dot{\delta}}. \tag{8}$$

但し，式 (8) 右辺の積分が 0 でない値をもつためには，$f(Z^A)$ が特異点を２つもつ必要がある．また，正エネルギー解を与える $f(Z^A)$ の定義域は，ツイスター空間の部分領域 $\mathbb{PT}^+ := \{\,[Z^A]\,|\,\overline{Z}_A Z^A > 0\,\}$ である．

Penrose は，ツイスター関数 $f(Z^A)$ の空間に，式 (6) の演算子表現が成立するように内積を定義して Hilbert 空間を構成している [2]．しかし，この Hilbert 空間においては，ノルムの収束性や共役演算子の定義域などは不明である．

3．我々が提案する Hilbert 空間の構成方法

式 (5) の交換関係は，式 (3) の変数 a^A を用いると

$$[\,\hat{a}^A, \hat{a}^{\dagger B}\,] = I^{AB}\,, \quad \text{others} = 0 \tag{9}$$

（但し，$A, B = 0, 1, 2, 3, \quad I = \mathrm{diag}(+1, +1, -1, -1)$ である）と書き換えられる．つまり，ツイスター演算子の交換関係は，不定計量の生成消滅演算子の形であることがわかる．演算子 $\hat{a}^A$ と $\hat{a}^{\dagger A}$ の表現を求めるために，$\hat{a}^{\dagger A}$ の固有状態を構成すると，演算子 $\hat{a}^A$ と $\hat{a}^{\dagger A}$ の表現は次のように得られる：

$$\hat{a}^A \doteq a^A\,, \quad \hat{a}^{\dagger A} \doteq -\frac{\partial}{\partial a^B}I^{BA} + \frac{1}{2}\overline{a}^A\,. \tag{10}$$

但し，$\overline{a}^A$ は a^A の複素共役である．式 (10) の演算子の表現は，$\hat{a}^{\dagger A}$ の $(1/2)\,\overline{a}^A$ を除いて，式 (6) の Penrose の表現と一致している．

式 (10) の表現を採用すると，ヘリシティ演算子の固有値 s に属する固有関数は次式のように求められる：

$$\Phi_{k,\ell,m,n}(a^A) = f_{k,\ell,m,n}(a^A)\exp\Big(\frac{1}{2}\overline{a}^A I_{AB} a^B\Big). \tag{11}$$

但し，$f_{k,\ell,m,n}(a^A) := (a^0)^k(a^1)^\ell(a^2)^m(a^3)^n$，$k + \ell + m + n = -2s - 2$ である．式 (11) の $\Phi_{k,\ell,m,n}(a^A)$ に１価性を要求すると (k, ℓ, m, n) は整数になる．よって，ヘリシティs は量子化され半整数または整数となる．

我々は，$\{\,\Phi_{k,\ell,m,n}(a^A)\,\}$ の空間に内積を定義して Hilbert 空間を構成する．その結果，特異点を２つもつツイスター関数のノルムは，(k, ℓ, m, n) の系列に応じて，正値または非正定値であることがわかる．さらに，共役演算子の定義域は $\mathbb{PT}^+$ であることがわかる．

4．まとめと今後の課題

ツイスター関数の内積の新しい定義を提案し，ノルムの詳細や共役演算子の定義域を吟味した．今後，我々の構成した Hilbert 空間をもとにして，ツイスター量子化における経路積分形式を構築する．

参考文献

[1] R. Penrose, J. Math. Phys. **8**, 345 (1967).
[2] R. Penrose, Int. J. Theor. Phys. **1**, 61 (1968).