O-47

CIP 法による移流方程式の解法とその評価

CIP Method and Its Effectiveness for Partial Differential Advection Equations

○石井秀征[1]，　相澤正満[2]，　長峰康雄[2]
*Hideyuki Ishii[1], Masamitsu Aizawa[2], Yasuo Nagamine[2]

The numerical problems of advection equations which appear in the physical phenomena like wave propagation case have been studied by using the CIP method. We describe this method briefly, and estimate its effectiveness from numerical point of view by applying this method to some test examples.

１．はじめに

自然界には，波に関する現象が多数存在する．例えば，電磁波や音波，また固体中を伝播する弾性波などが挙げられる．そこで今回は，そのような現象を記述する方程式である移流方程式とその解法の一つとして CIP 法について注目し，その評価を行う．

２．移流方程式

関数 $f(x,t)$ について，次のような方程式を移流方程式と呼ぶ．u は速度を表すが，今回は定数として計算した．

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

ここで重要なのは，$x-ut$ の任意の関数が(1)式の解であるということである．例えば，上式に f として $\sin(x-ut)$ や $\exp(-(x-ut)^2)$ などを代入してみれば成立している事が容易にわかる．

３．CIP 法

古くから研究されてきた数値解法では，物理的な意味ではなく単なる滑らかさという人工的な条件で解を構成しようとしていた．そこで，メッシュ間の他の情報（プロファイル）も方程式を満足させることができないかという考えに基づいて生まれたのが CIP 法(Cubic-Interpolated Pseudo Particle Method /Constrained Interpolation Profile Method)である．

まず，(1)式の移流方程式を x に関して微分すると，

$$\frac{\partial g}{\partial t}+u\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x}g \qquad (2)$$

となる．ただし，$g=\partial f/\partial x$ とした．

いま，伝播速度 u が一定の場合（$\partial u/\partial x=0$）には，(2)式は(1)式と一致する．すなわち，微分 g が u の速度で伝播することを表している．これにより，関数 f とその微分値 g の時間発展が方程式に基づいて追跡できることになる．微分値も u で伝播するとすれば，移動後のプロファイルにさらに傾きという制限を加えることができる．この情報を用いればメッシュ間のプロファイルが移動前に非常に近くなることが期待できる．これが CIP 法の特徴である．

次に，この方法を定式化する[1]．２つのメッシュ i, i−1の間のプロファイルを

$$F_i(x)=a_i(x-x_i)^3+b_i(x-x_i)^2+c_i(x-x_i)+d_i \qquad (3)$$

のように３次多項式で表すとき，隣り合う２つの格子点上で与えられた４つの量 f_i，g_i，f_{i-1}，g_{i-1} から，以下の関係式を用いて４つの未知数 a,b,c,d が決定される．ただし，$x=x_i$ での値 $f(x_i)$ を f_i としている．

$$\begin{cases} a_i=\dfrac{2(f_i-f_{i-1})+(g_i+g_{i-1})\Delta x}{\Delta x^3} \ , \\ b_i=\dfrac{-3(f_i-f_{i-1})-(2g_i+g_{i-1})\Delta x}{\Delta x^2} \ , \\ c_i=g_i \ , \ d_i=f_i \end{cases}$$

ここで，時間発展について考える．
元の点 f_{i-1} に対して，移流後の点 f_i の値は，x_i から１ステップあたりの進行量である $u\Delta t$ だけ戻った値である．すなわち，(3)式において $x=x_i-u\Delta t$ を代入すれば，次ステップの値である f_i^{n+1} を求めることができる．

$$f_i^{n+1}=a_i\xi^3+b_i\xi^2+c_i\xi+d_i \qquad (4)$$

ここで、$\xi=u\Delta t$ とした．さらに，微分値 g_i^{n+1} についても同様にして求まる．

$$g_i^{n+1}=3a_i\xi^2+2b_i\xi+c_i \qquad (5)$$

以上(4)，(5)式を繰り返すことにより移流方程式の解を求めることができる．

４．解析結果

CIP 法により，１次元の矩形波および三角波の伝播の様子を計算した結果を次に示す．尚，初期条件として $u\Delta t/\Delta x$ ＝0.4 を与え，それぞれ Δt （＝0.1）を 100 ステップ計算させている．また比較のため，風上差分

１：日大理工・院・量科研　２：日大理工・教員・量科研

法および Lax-Wendroff 法での結果も示した．

さらに，それぞれの誤差についても評価した．評価方法には次式を用いた．

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\sum (f_i - f_{ex})^2}}{\sum f_{ex}} \tag{6}$$

ここで，f_i は数値解であり，f_{ex} は厳密解である．

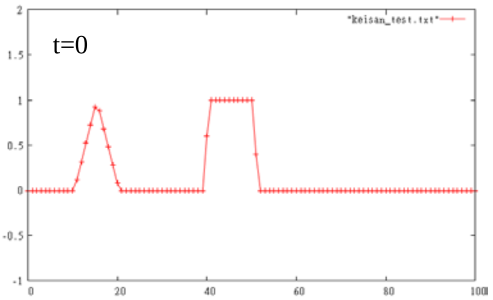

図１．矩形波および三角波の初期状況

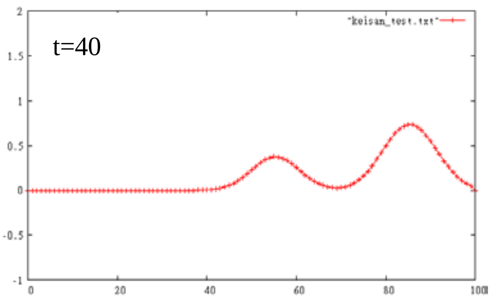

図２．風上差分法による数値解（ε = 0. 1826139）

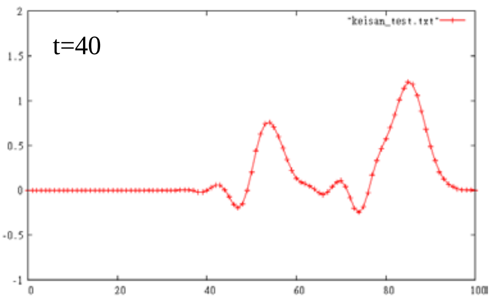

図３．Lax-Wendroff 法による数値解（ε =0. 1373889）

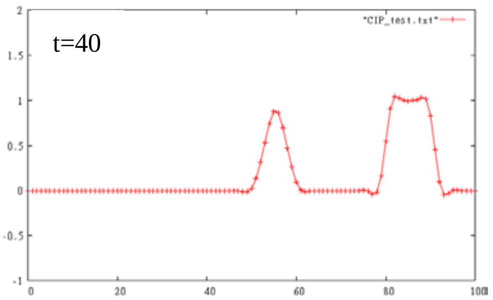

図４．CIP 法による数値解（ε =0. 0415051）

風上差分法では，矩形や三角波であったはずの値が徐々になまってきてしまっている．これは，格子点間を直線近似で結んだために数値拡散が起きてしまったためである．また Lax-Wendroff 法では，振動が起きてしまっている．これは，ギブスの現象と呼ばれる．ギブスの現象とは，不連続点の近くで減衰しながらオーバーシュートとアンダーシュートを繰り返して近似しようとするが，実際そのピーク値は小さくならず蛇腹を押し縮めるようにしてゼロに収束する形となってしまう現象である．この現象はフーリエ級数などにもよくみられる．一方 CIP 法では，数値拡散も少なく，振動はわずかに起きているものの成長せずに移流している．実際，誤差の値も風上差分法や Lax-Wendroff 法に比べ倍程度の精度が得られた．

５．結論

１次元の移流方程式の解法について，風上差分法，Lax-Wendroff 法，CIP 法によりそれぞれ比較・検討した．CIP 法は，特に数値拡散や数値振動も少なく，保存性に優れた計算手法であることがわかった．

また今回は１次元方程式についての考察に留まったが，今後は非線形方程式についての計算および２次元，３次元への展開[2]をし，実際のプラズマや流体力学に関する問題に対して CIP 法を適用したいと考えている．

以下に，CIP 法を用いた２次元での矩形波の移流の様子の一部を示す．

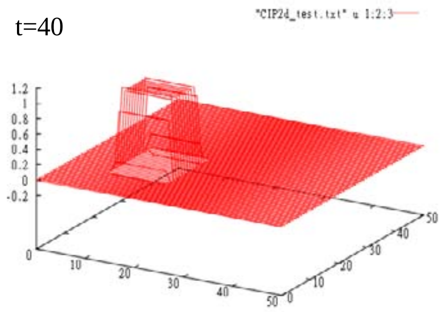

図５．CIP 法による２次元での矩形波の数値解

６．参考文献

[1] 矢部孝，尾形陽一，滝沢研二：「CIP 法と JAVA による CG シミュレーション」, 森北出版, pp.28-63, 2003 年

[2] 肖鋒，伊井仁志，小野寺直幸：「計算流体力学」，コロナ社，pp.40-58，2009 年.