

## 半順序ベクトル空間における HAHN BANACH 定理について

日本大学理工学部非常勤講師 渡辺 俊一\* (WATANABE Toshikazu)  
 日立製作所 川崎 敏治 (KAWASAKI Toshiharu)  
 玉川大学工学部 豊田 昌史 (TOYODA Masashi)

Hahn-Banach の定理は関数解析において最重要な定理のひとつとして知られている。最もよく知られたものとしては、以下のように実数値に値をとる場合のものがある [7]:

$p$  を線形空間  $X$  から実数  $R$  への sublinear な関数,  $Y$  を  $X$  の部分空間とする.  $Y$  上で  $g \leq p$  を満たすような  $Y$  から  $R$  への線形関数  $g$  は,  $X$  で  $f \leq p$  を満たすような  $X$  から  $R$  への線形関数  $f$  に拡張できる.

証明は, Zorn の補題を用いたものが一般的である. この定理は値域が Riesz 空間の場合でもその成立が知られている. また, M. M. Fel'dman [2] は以下の Hahn-Banach exact approximation property を与えた.

**Theorem 1.**  $f$  を線形空間  $X$  から chain 完備な半順序線形空間  $E$  への sublinear な関数とし,  $y \in X$  を任意の点としてとる. このとき  $X$  で  $g \leq f$  かつ  $g(y) = f(y)$  をみたすような線形関数  $g$  が存在する.

Hahn-Banach の定理, および Hahn-Banach exact approximation property の証明は, Zorn の補題を用いて値域が実数値の場合と同様にできる. 他方, Zorn の補題ではなく不動点定理を用いた証明がある. 例えば, 値域が実数値の場合, Markov-角谷の不動点定理を用いた証明が知られている. [3, 4, 7] を参照.

本講演では, Bourbaki-Kneser の不動点定理の適用により線形空間で定義された, Dedekind 完備な半順序線形空間に値を取るベクトル値関数に対し, Hahn-Banach の定理 (Theorem 4), および Hahn-Banach exact approximation property (Theorem 1) が示せることを述べる. Bourbaki-Kneser の不動点定理は Zorn の補題を用いることなく証明することができる [5]. 従って, Hahn-Banach の定理, および Hahn-Banach exact approximation property を Zorn の補題を用いることなく証明することができる.

以下では  $R$  を実数,  $I$  は添字集合とし,  $(E, \leq)$  を半順序集合とする. 半順序集合  $E$  が完備であるとは  $E$  の任意の chain が  $E$  で下限をもつこととする.  $E$  から  $E$  への関数  $f$  が減少であるとは任意の  $x \in E$  に対し  $f(x) \leq x$  が成り立つこととする. このとき, 以下の定理が成立することが知られている, [1, 5, 6] を参照.

**Theorem 2 (Bourbaki-Kneser の不動点定理).**  $(E, \leq)$  を空でない完備な半順序集合とする.  $f$  を  $E$  から  $E$  への減少である関数とする. このとき  $f$  は不動点をもつ.

以下,  $X$  を線形空間とし  $E$  を半順序線形空間とする.  $E$  が chain 完備であるとは  $E$  の空でない任意の下に有界な chain が下限を持つことである.  $E$  が Dedekind 完備 (順序完備) であるとは  $E$  の空でない任意の下に有界な部分集合が下限を持つことである.  $X$  から  $E$  への関数  $p$  が sublinear であるとは 以下が成り立つことである.

(S1) 任意の  $x, y \in X$  に対し  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$  が成り立つ.

(S2) 任意の  $x \in X$  と任意の  $\alpha \geq 0$  に対し  $p(\alpha x) = \alpha p(x)$  が成り立つ.

このとき Theorem 2 により, Hahn-Banach exact approximation property (Theorem 1) の別証明を与えることができる. Theorem 1 により次の Corollary が得られる.

**Corollary 3.**  $f$  を線形空間  $X$  から, Dedekind 完備な半順序線形空間  $E$  への sublinear な関数とする. このとき  $X$  から  $E$  への線形関数  $g$  が存在し  $g \leq f$  を満たす.

Corollary 3 から, 値域が Dedekind 完備な半順序線形空間である場合の Hahn-Banach の定理の成立を示すことができる.

\*講演者.

**Theorem 4.**  $p$  を線形空間  $X$  から Dedekind 完備な半順序線形空間  $E$  への *sublinear* な関数とする.  $Y$  を  $X$  の部分空間とする.  $Y$  上で  $g \leq p$  を満たすような  $Y$  から  $E$  への任意の線形関数  $g$  は,  $X$  上で  $f \leq p$  を満たすような  $X$  から  $E$  への線形関数  $f$  に拡張できる.

さらに次の Mazur-Orlicz の定理も Corollary3 を用いて示せる.

**Theorem 5.**  $p$  を線形空間  $X$  から Dedekind 完備な半順序線形空間  $E$  への *sublinear* な関数とする.  $\{x_i \mid i \in I\}$  を  $X$  の元からなる族,  $\{y_i \mid i \in I\}$  を  $E$  の元からなる族とする. 次の (1), (2) は同値である.

- (1) 任意の  $x \in X$  に対し,  $X$  から  $E$  への線形関数  $f$  が存在し  $f(x) \leq p(x)$  を満たし, 任意の  $i \in I$  に対し  $y_i \leq f(x_i)$  を満たす.
- (2) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  と正の数  $\alpha_i, j_i \in I, (i = 1, 2, \dots, n)$  に対して

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_{j_i} \leq p \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)$$

が成り立つ.

#### REFERENCES

- [1] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1940.
- [2] M. M. Fel'dman, *Sufficient conditions for the existence of supporting operators for sublinear operators*, Sibirsk. Mat. 2. **16** (1975), 132–138 (Russian).
- [3] N. Hirano, H. Komiya, and W. Takahashi, *A generalization of the Hahn-Banach theorem*, J. Math. Anal. Appl. **88** (1982), 333–340.
- [4] S. Kakutani, *Two fixed-point theorems concerning bicomact convex sets*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **14** (1938), 242–245.
- [5] W. A. Kirk, *Fixed point theory: A brief survey*, Universidas de Los Andes, Mérida, 1990.
- [6] H. Kneser, *Eine direkte Ableitung des Zornschen Lemmas aus dem Auswahlaxiom*, Math. Z. **53** (1950), 110–113.
- [7] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis: Fixed Points Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

(渡辺 俊一)

*E-mail address:* wa-toshi@mti.biglobe.ne.jp

(川崎 敏治)

*E-mail address:* toshiharu.kawasaki@nifty.ne.jp

(豊田 昌史)

*E-mail address:* mss-toyoda@eng.tamagawa.ac.jp