P−5

素数定理

The Prime Number Theorem

○ 冨岡恵輔[1]

1　Eluer 積

Definition 1.1 Riemann　zeta − function

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad s=\sigma+it,\sigma>1,\sigma,t\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Theorem 1.1

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\qquad \sigma>1,p:\text{prime number} \tag{2}$$

また、右辺を左辺の Euler 積表示という。

2　Zeta-函数の函数等式

Theorem 2.1 函数 $\zeta(s)$ は全複素平面に一意的に接続し、$s=1$ における極以外では正則である。この極の近傍では漸近式

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+c_E+O(|s-1|) \tag{3}$$

が成立する。ただし、$c_E=0.57721\ldots$ は Euler 常数である。さらに、$s\in\mathbb{C}$ について函数等式

$$\zeta(1-s)\quad=\quad 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\Gamma(s)\zeta(s) \tag{4}$$

が成立する。

3　Riemann の報文

Definition 3.1 素数の個数
実数 x 未満の素数の個数を表す函数を

$$\pi(x)=\sum_{p<x}1 \tag{5}$$

と定義する。

(2) において、実数 $s>1$ の条件下で、対数微分をとると、

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{6}$$

ただし、$\Lambda(n)$ は von Mangold 函数といい、

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & n\text{ は素数 } p \text{ の冪}\\ 0 & \text{そのほか}\end{cases} \tag{7}$$

と定義する。Tchebyshev の函数

$$\psi(x)=\sum_{n<x}\Lambda(n) \tag{8}$$

を導入すれば、

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{d\psi(t)}{\log t}+O(\sqrt{x}\log x) \tag{9}$$

が得られる。

[1]日大理工・院・数学

4　Zeta-函数の零点及び素数定理

以下は素数定理の証明するための Riemann の主張である。
函数 $\psi(x)$ についての明示式、あるいは完全展開式

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}), \qquad x > 1 \tag{10}$$

が成り立つ。

Theorem 4.1 条件 $x = [x] + \dfrac{1}{2}$ のもとに、$\forall T \geq 2$ において

$$\psi(x) = x - \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + O\left(\frac{x}{T}(\log xT)^2\right) \tag{11}$$

実際には (11) は変数 x に対する条件にしなくても成り立つ。また、(11) において、$T \longrightarrow \infty$ としたときの

$$\psi(x) = x - \lim_{T\to\infty} \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|<T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \tag{12}$$

を考えると、$\psi(x)$((8)) は、x が何らかの素数の冪において不連続となる函数なので、(12) は x が何らかの素数の冪に一致しない場合にのみ成り立つ。

Lemma 4.1 de la Vallée Poussin の比消滅領域
絶対常数 $c > 0$ が存在し、

$$\zeta(s) \neq 0\ ,\ \sigma > 1 - \frac{c}{\log(|t|+2)}\ ,\ t \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Theorem 4.2 de la Vallée Poussin の素数定理
絶対常数 $\exists c > 0$ が存在し、

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x\exp\left(-c(\log x)^{\frac{1}{2}}\right)\right) \tag{14}$$

ただし、$\mathrm{li}(x)$ は対数微分、つまり

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{v\to+0}\left\{\int_0^{1-v} + \int_{1+v}^{x}\right\}\frac{du}{\log u} \tag{15}$$

参考文献

[1] 本橋洋一 , 解析的整数論 I-素数分布論 (朝倉数学大系)　, 朝倉書店　, 2009

[2] 小島塁 , Posson summation formula and Binet's expansion of the logarithm of the Gamma function , 日本大学大学院　理工学研究科　数学専攻　平成 21 年度修士論文 , 2010

[3] E.C.Titchmarah , The Theory of Functions , OxfordUniv Press , Oxford , 1968

[4] 三村征雄 , 微分積分学 I(岩波全書) , 岩波書店 , 1970

[5] 三村征雄 , 微分積分学 II(岩波全書) , 岩波書店 , 1973