P-6

債務不履行リスクの数値解析

井上 学 (1), 石村 直之 (2), 中村 正彰 (1)
Manabu INOUE, Naouki ISHIMURA and MasaAki NAKAMURA
csmn09001@g.nihon-u.ac.jp, ishimura@econ.hit-u.ac.jp, nakamura@math.cst.nihon-u.ac.jp

Abstract: We introduce systems of ordinary differential equations (ODEs), which nonlinearly extend a looping default model of defaultable firms. Unknown functions are defined through a weighted integral of the tail distribution functions of the first jump time. We compare the results with the analytical results.

1. 序

次の連立常微分方程式系 (1).(2) は債務不履行証券同士の債務不履行リスクの非線形モデルから導かれる ([2] を参照)。

$$\begin{cases} u'(t) &= -\alpha u(t) + \alpha v(t)w(t) \\ v'(t) &= -\beta v(t) + \beta w(t)u(t) \\ w'(t) &= -\gamma w(t) + \gamma u(t)v(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u'(t) &= -\alpha u(t) + \alpha v(t)w(t) \\ v'(t) &= -\beta v(t) + \beta w(t)u(t) \\ w'(t) &= -\gamma w(t) - \gamma u(t)v(t), \end{cases} \tag{2}$$

ここで α, β, γ は正の定数。

未知関数 $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ は各三社の最初の債務不履行時間に由来し、これ等の非線形モデルは債務不履行リスクに関連する方程式系として考えてよい。

これらの系に対して、次の理論的な結果を得た。([8])

定理

(A) 十分小さな任意の初期値 (u_0, v_0, w_0) に対して、(1) の解 $(u(t; u_0),\, v(t; v_0),\, w(t; w_0))$ は原点に指数関数的に収束する。

一方、十分大きな初期値に対する解は全て有限時間で発散する。

そして (1) の解 $(u(t), v(t), w(t))$ が $t \to T$ でブロウアップするとき,

$$\lim_{t\to T} \sqrt{\beta\gamma}(T-t)u(t) =: u_*,$$
$$\lim_{t\to T} \sqrt{\gamma\alpha}(T-t)v(t) =: v_*,$$
$$\lim_{t\to T} \sqrt{\alpha\beta}(T-t)w(t) =: w_*,$$

$$u_*^2 = v_*^2 = w_*^2 = u_* v_* w_* = 1$$

が成立する。

さらに $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ を

$$u(t) = \frac{u_*(1+x(t))}{\sqrt{\beta\gamma}(T-t)},$$
$$v(t) = \frac{v_*(1+y(t))}{\sqrt{\gamma\alpha}(T-t)},$$
$$w(t) = \frac{w_*(1+z(t))}{\sqrt{\alpha\beta}(T-t)}$$

により定義すれば、次の極限が得られる。

$$\lim_{t\to T} \frac{x(t)}{(\beta+\gamma-\alpha)(T-t)} = \lim_{t\to T} \frac{y(t)}{(\gamma+\alpha-\beta)(T-t)} = \lim_{t\to T} \frac{z(t)}{(\alpha+\beta-\gamma)(T-t)} = \frac{1}{2}$$

(B) 任意の初期値 (u_0, v_0, w_0) に対する (2) の解 $(u(t; u_0), v(t; v_0),\ w(t; w_0))$ は原点に指数関数的に収束する。

本講演の目的はこれらのシステムを数値的に解析し、理論的結果を可視化するために実行した数値シミュレーションの結果の報告である。

2. 数値シミュレーション

以下の条件で数値シミュレーションを行った。

1.100 桁の多倍長

2. 四次のルンゲクッタ法を使用

3.$\alpha = 4.0$, $\beta = 3.0$ and $\gamma = 2.0$ として計算

結果の一部を次に挙げておく。

(1) 日本大学 Nihon University, (2) 一橋大学 Hitotsubashi University

図 1 は十分小さな初期値に対して u が原点に収束する動きを表したものである。横軸は時間を表す。

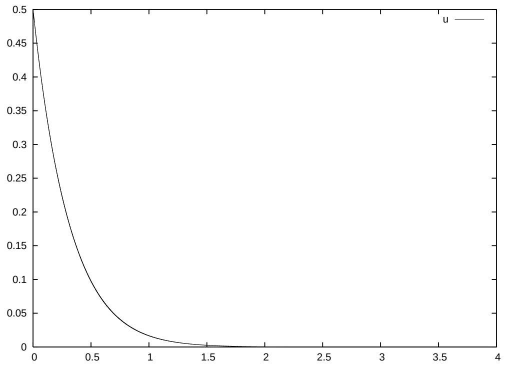

図 1　 u の 0 への収束.

図 2 は十分大きな初期値に対し、u がブロウアップする動きを表したものである。横軸は横軸は時間を表す。

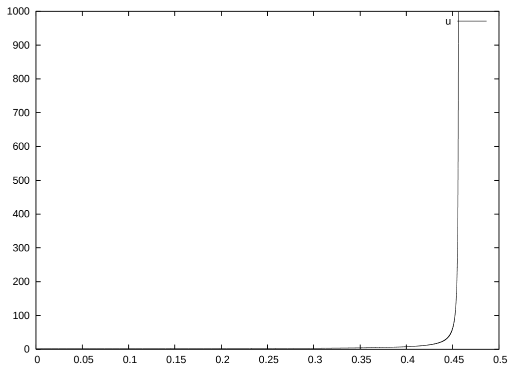

図 2　u の爆発

図 3 は十分大きな初期値に対する爆発時間の計算であり、u との関係を示した。

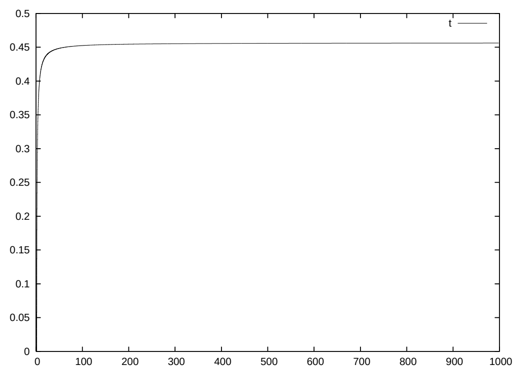

図 3　爆発時間 T

3. 考察

R.A. Jarrow and F. Yu によって得られた非線形微分方程式系 (1).(2) の解について理論的かつ数値的に解析した。この系の解は興味ある漸近挙動を示すことを既に理論的に示したが、数値的に可視化することを目的として計算した。特に爆発 (blow up) する解についてその漸近挙動に対する数値計算を実行した。

金融工学で爆発が何を意味するかは、まだ定まっているわけではないが、数学的には爆発解の挙動は細心の取り扱いが必要であり、数値計算でも同様で従来の方法では精度を上げにくかった。

多倍長演算を使用することによって精度を上げることができ、その挙動が理解し易くなったといえるが、まだ発展途上である。

4. 参考文献

[1]T.R. Bielecki and M. Rutkowski: Dependent defaults and credit migrations, *Applicationes Mathematicae*, **30** (2003), 121–145.

[2]N. Ishimura and M.A. Nakamura: System of nonlinear ODEs of default risk model, preprint.

[3]R.A. Jarrow and F. Yu: Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *J. Finance*, **56** (2001), 1765–1799.

[4]F. Kanda: Looping default – An analysis of firms with counterparty risk, *Thesis for the Master-course degree*, Graduate School of Economics, Hitotsubashi University, March 2009.

[5]J. Kawakami: The looping default model, *Thesis for the Master-course degree*, Graduate School of Economics, Hitotsubashi University, March 2010.

[6]S. Kusuoka: A remark on default risk models, *Advances in Mathematical Economics*, **1** (1999), 69–82.

[7]W.-M. Ni, K. Suzuki, and I. Takagi: The dynamics of a kinetic activator-inhibitor system, *J. Differential Equations*, **229** (2006), 426–465.

[8]M Inoue, N Ishimura and M Nakamura: Numerical Study on the Systems of Nonlinear Ordinary Differential Equations for Default Risk Model, the Proceedings of the 17th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, to appear.