P−7

過渡的なクラスに属するランダム環境中のランダムウォークに対する重複対数の法則

The law of the iterated logarithm for a class of transient random walk in random environment

○久保田　直樹[1]

1　はじめに

確率論における代表的な極限定理として，大数の法則と中心極限定理がある．この 2 つ定理の中間的存在として重複対数の法則という主張がある．今回はこの重複対数の法則が，次章で設定するモデルについて成立するかを考察した．

2　モデル

今回扱うモデルの概略について説明する．$\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークとは，各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して, その隣接点に移動する確率 (これを**遷移確率**という) を与えて得られる $\mathbb{Z}^d$ 上のマルコフ連鎖のことである．そこで，各 $x \in \mathbb{Z}^d$ に与えた遷移確率がランダムである場合の $\mathbb{Z}^d$ 上のマルコフ連鎖を考え，これを $\mathbb{Z}^d$ 上の**ランダム環境におけるランダムウォーク**(**Random Walk in Random Environment**，以下 “**RWRE**” と略す) という．より詳しく，RWRE の定義について説明する．$\mathcal{E} := \{e \in \mathbb{Z}^d; |e| = 1\}$ とし，$\mathcal{P} := \{p : \mathcal{E} \to [0,1]; \sum_{e\in\mathcal{E}} p(e) = 1\}$ と定義する．$\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$ とし，Ω に確率測度 $\mathbb{P}$ を与えたとき $\omega := (\omega(x,\cdot))_{x\in\mathbb{Z}^d} \in \Omega$ を**ランダム環境**という．このとき，ランダム環境 ω を遷移確率とする $\mathbb{Z}^d$ 上のマルコフ連鎖 $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ のことを RWRE という: すなわち，$x \in \mathbb{Z}^d$ と $e \in \mathcal{E}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&P^x_\omega(X_0 = x) = 1,\\
&P^x_\omega(X_{n+1} = X_n + e | X_0, \ldots, X_n) = \omega(X_n, e).
\end{aligned}
$$

ここで，マルコフ連鎖に関する確率測度 $P^x_\omega, x \in \mathbb{Z}^d$ を **quenched law** という．また，P^x_ω をランダム環境に関して平均化した確率測度 $P^x := \mathbb{P} \otimes P^x_\omega, x \in \mathbb{Z}^d$ を **annealed law** という．モデルの構成についての詳細は [3] を参照していただきたい.

最後に，$\mathbb{P}$ に対していくつか仮定を与えておく．まず，$\mathbb{P}$ は Ω 上の直積確率測度，すなわち $(\omega(x,\cdot))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ は独立同分布である．さらに，$\mathbb{P}$ は uniformly elliptic である．すなわち，ある $\kappa > 0$ が存在して，$x \in \mathbb{Z}^d$ と $e \in \mathcal{E}$ に対して $\mathbb{P}(\omega(x,e) \geq \kappa) = 1$ をみたす.

3　背景

1 次元格子上の RWRE の研究は今日まで盛んに研究がなされ，[1] または [3] などに様々な結果がまとめられている. 1 次元格子上の RWRE に対して多くの結果が得られている理由の 1 つとして，1 次元格子特有の性質を用いて様々な量の評価を直接計算できることが挙げられる．そのため，次元が 1 より大きい格子上の RWRE に対して 1 次元の場合と同様の手法を用いて議論を進めていくことは難しく，1 次元の場合に比べその性質はあまりよく分かっていなかった．しかし近年，多次元格子上の RWRE についての研究も飛躍的に進展してきている．その中でも，ある方向に対して過渡的である RWRE に対する研究が盛んに行われている．ここでいう過渡的とは，ある $\ell \in S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d; |x| = 1\}$ に対して $P^0(\lim_{n\to\infty} X_n \cdot \ell = \infty) = 1$ が成立することである．その解析の根本には，**renewal structure** という手法がある. これは，$X_\cdot \cdot \ell$ がその局所最大値を一度越えた後は，決してその値より小さくならないような時刻が構成できるというものである．そのような時刻を **renewal time** という．より詳しく，以下のようにして renewal time τ_1 を定義する:

$$
\begin{aligned}
&D := \inf\{n \geq 0; X_n \cdot \ell < X_0 \cdot \ell\},\\
&T_{\geq L} := \inf\{n \geq 0; X_n \cdot \ell \geq L\}, \qquad L \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

[1]日大理工・院・数学

$$
\begin{aligned}
&S_{k+1} := T_{\geq M_k+1}, \quad S_0 := 0,\\
&R_{k+1} := D \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1},\\
&M_{k+1} := \sup\{X_m \cdot \ell; 0 \leq m \leq R_{k+1}\}, \quad M_0 := X_0 \cdot \ell, \qquad k \geq 0,\\
&K := \inf\{j \geq 1; S_j < \infty, R_j = \infty\},\\
&\tau_1 := S_K.
\end{aligned}
$$

この renewal structure を用いることで，renewal time が適当な条件をみたせば RWRE に対する大数の法則と中心極限定理が成立することが知られている．これらに関する詳細については [2] を参照していただきたい．そこで，大数の法則と中心極限定理の中間の定理である重複対数の法則が過渡的な RWRE に対して成立するかを考察することにした．

4　結果

$\mathbb{P}$ は第 2 章の最後に与えた仮定をみたすとする．さらに，ある $\ell \in S^{d-1}$ に対して，$P^0(\lim_{n\to\infty} X_n \cdot \ell = \infty) = 1$ が成立するとする．このとき，RWRE に対して次の重複対数の法則が得られる:

Theorem 4.1　ある $\delta > 0$ が存在して，$E^0[\tau_1^{2+\delta}] < \infty$ であると仮定する．このとき，あらゆる $u \in S^{d-1}$ に対して，P^0-a.s. で

$$
\limsup_{n\to\infty} \frac{(X_n - nv)\cdot u}{E^0[\tau_1|D=\infty]^{-\frac{1}{2}}(2c_u n \log\log n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = 1,
$$
$$
\liminf_{n\to\infty} \frac{(X_n - nv)\cdot u}{E^0[\tau_1|D=\infty]^{-\frac{1}{2}}(2c_u n \log\log n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = -1
$$

が成立する．ここで，

$$
\begin{aligned}
&v := \frac{E^0[X_{\tau_1}|D=\infty]}{E^0[\tau_1|D=\infty]},\\
&c_u := \mathrm{Var}_{P^0(\cdot|D=\infty)}((X_{\tau_1} - \tau_1 v)\cdot u) = E^0[\{(X_{\tau_1} - \tau_1 v)\cdot u\}^2 | D=\infty].
\end{aligned}
$$

である．

References

[1] Barry D. Hughes. *Random walks and random environments. Vol. 2.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Random environments.

[2] Alain-Sol Sznitman. Topics in random walks in random environment. In *School and Conference on Probability Theory*, ICTP Lect. Notes, XVII, pp. 203–266 (electronic). Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004.

[3] Ofer Zeitouni. Random walks in random environment. In *Lectures on probability theory and statistics*, Vol. 1837 of *Lecture Notes in Math.*, pp. 189–312. Springer, Berlin, 2004.