

G-21

純正和音進行 II-V-I が存在しないことの計算による証明
 The proof of nonexistence of Pure Chord Progression II-V-I by calculation

○市村瞬¹
 *Shun Ichimura¹

Abstract: There are many kinds of intonations in the world. One of such is so called the pure intonation, which can lead some pure chords. In this paper, we find out the pure chord progression of II-V-I by computer simulation, which is regarded as one of the standard chord progressions in modern music. Then, we verify that such a pure chord progression of II-V-I cannot be derived.

1. 概要

音律は世界に数多く存在している.その中の一つに,純正律という音律がある.純正律によって導かれる音階には I,III,IV,V,VI和音がそれぞれ純正和音になり,II,VII和音が純正和音にならないという特徴がある.現代音楽理論における重要な和音進行の一つである II-V-I が純正和音進行になるような音律を導けるかどうかを計算により検証した結果,このような音律は導けないということが分かった.本論文では簡単に音律,特に純正律の説明を行った後,純正和音進行 II-V-I が存在しないことの計算による証明を行う.

2. 音律

本節では音律に関わる用語・概念と純正律について簡単に述べる.音律とは,ある系統の音楽においてどんな高さの音を使うかというルールのことである[1].

2. 1. セント

セントとは音程を表す単位のこと,1オクターブを1200の均等な単位に分割する.音程とはある2音の音高差のことである.この概念を導入することで音程幅を簡単にとらえられるようになる[2].

2. 2. 純正和音

ここでいう純正和音とは,2つ以上の音を同時に鳴らしたときに喰りがない和音のことを指す.また,純正長三和音の各音程比は4:5:6で,純正短三和音の各音程比は10:12:15である[3].

2. 3. 純正律

純正律では完全5度を2:3,長3度を4:5に取ることにより長音階が,完全5度を2:3、短3度を5:6に取ることにより短音階が導き出される.純正律から導

き出されるハ調長音階の音程比と,この音階により導くことのできる三和音の音程比を Table1,2に示す.なお,本論文ではオクターブ上の音をCに対してC'のように表記する.

	C - D	D - E	E - F	F - G	G - A	A - B	B - C'
Cent	204	182	112	204	182	204	112
Ratio of Interval	8 : 9	9 : 10	15 : 16	8 : 9	9 : 10	8 : 9	15 : 16

Table 1. Ratio of interval of Pure Major Scale in C

	Organization of Tone	Ratio of Interval
I	C - E - G	4 : 5 : 6
II	D - F - A	27 : 32 : 40
III	E - G - B	10 : 12 : 15
IV	F - A - C	4 : 5 : 6
V	G - B - D	4 : 5 : 6
VI	A - C - E	10 : 12 : 15
VII	B - D - F	45 : 54 : 64

Table 2. Ratio of interval of three chord in C

3. 証明

本節では純正和音進行 II-V-I が存在しないことの計算による証明を行う.まず,純正律によって導き出されたハ調長音階の音程関係を Figure 1 のように表す.

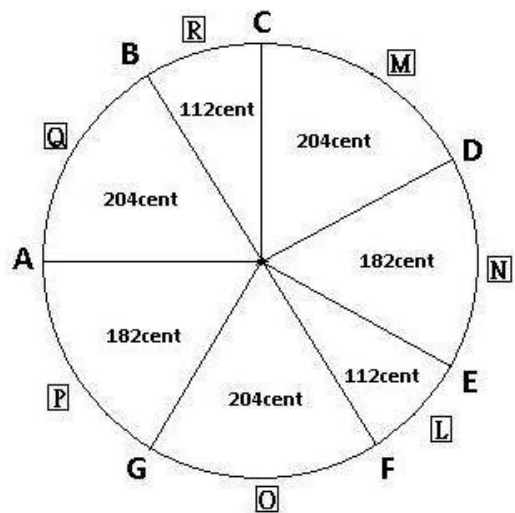


Figure 1 Circle of Pure Scale in C

1 : 日大理工・学部・数学

204cent は 3 個, 182cent と 112cent は 2 個ずつ, 合計 7 個あることが分かる。これら音程 7 個を順に M, N, L, O, P, Q, R とし, 音程 3 種類をそれぞれ M~R に適当に割り当てていく。図 1 において, 純正長三和音の一つである C (構成音 C E G) を見ていくと, 音程 C E は 386cent (M=204cent+N=182cent), 音程 E G は 316cent (L=112cent+O=204cent), 音程 G C' は 498cent (P=182cent+Q=204cent+R=112cent) となる。また, 純正短三和音の一つである E (構成音 E G B) を見ていくと, 音程 E G は 316cent (L=112cent+O=204cent), 音程 G B は 386cent (P=182cent+Q=204cent), 音程 B E' は 498cent (R=112cent+M=204cent+N=182cent) となる。さて, I, V は長三和音で, II は短三和音であるから, I, II, V の和音がそれぞれ純正となるには, 以下の①~③の条件を満たす必要がある。

I :

$$\{(M=204cent \wedge N=182cent) \vee (M=182cent \wedge N=204cent)\} \\ \wedge \\ \{(L=112cent \wedge O=204cent) \vee (L=204cent \wedge O=112cent)\} \\ \wedge \\ \{(P=204cent \wedge Q=182cent \wedge R=112cent) \vee \\ (P=182cent \wedge Q=204cent \wedge R=112cent) \vee \\ (P=182cent \wedge Q=112cent \wedge R=204cent) \vee \\ (P=204cent \wedge Q=112cent \wedge R=182cent) \vee \\ (P=112cent \wedge Q=204cent \wedge R=182cent) \vee \\ (P=112cent \wedge Q=182cent \wedge R=204cent)\} \cdots \text{条件①}$$

II :

$$\{(N=112cent \wedge L=204cent) \vee (N=204cent \wedge L=112cent)\} \\ \wedge \\ \{(O=182cent \wedge P=204cent) \vee (O=204cent \wedge P=182cent)\} \\ \wedge \\ \{(Q=204cent \wedge R=182cent \wedge M=112cent) \vee \\ (Q=182cent \wedge R=204cent \wedge M=112cent) \vee \\ (Q=182cent \wedge R=112cent \wedge M=204cent) \vee \\ (Q=204cent \wedge R=112cent \wedge M=182cent) \vee \\ (Q=112cent \wedge R=204cent \wedge M=182cent) \vee \\ (Q=112cent \wedge R=182cent \wedge M=204cent)\} \cdots \text{条件②}$$

V :

$$\{(P=204cent \wedge Q=182cent) \vee (P=182cent \wedge Q=204cent)\} \\ \wedge \\ \{(R=112cent \wedge M=204cent) \vee (R=204cent \wedge M=112cent)\} \\ \wedge$$

$$\{(N=204cent \wedge L=182cent \wedge O=112cent) \vee \\ (N=182cent \wedge L=204cent \wedge O=112cent) \vee \\ (N=182cent \wedge L=112cent \wedge O=204cent) \vee \\ (N=204cent \wedge L=112cent \wedge O=182cent) \vee \\ (N=112cent \wedge L=204cent \wedge O=182cent) \vee \\ (N=112cent \wedge L=182cent \wedge O=204cent)\} \cdots \text{条件③}$$

つまり, II-V-I の和音進行が純正和音進行になるような音階を導く音律は「条件①∧条件②∧条件③」を満たす必要がある。この条件を満たす音程の組み合わせを探すプログラムを書き, 計算を行った (プログラムの詳細は次節を参照されたい)。自作プログラムによる計算を行った結果, 条件を満たす音程 3 種類の組み合わせは導かれなかった。

4. 自作プログラム

本節では自作プログラムのアルゴリズムについて述べる。まず 7 個の音程 M~R を $x_0 \sim x_6$ で表し, 204cent を 1, 2, 3, 182cent を 4, 5, 112cent を 6, 7 という具合に 3 種類の音程を数字で表記した。1~7 の数列の順列生成を $7! = 5040$ 回繰り返して, 一つ一つ評価していく。条件を満たせば“成功”を, 満たさなければ“失敗”を出力するものとなっている。なお, プログラミング言語は C++ を用いた。

5. 終わりに

今回は和音進行 II-V-I に限定して, 純正和音進行を作ることができるかどうかという立場から話を進めてきたが, 現代音楽理論における重要な和音進行は他にも多く存在する。今後の課題としてこれら他の和音進行についても考察を行っていくということが上げられる。

6. 参考文献

- [1] 小方厚: 「音律と音階の科学-ドレミはどのようにして生まれたか」, pp18, September 2007.
- [2] 藤枝守: 「[増補] 響きの考古学 音律の世界史からの冒険」, pp 20-21, February 2007.
- [3] 「音律入門 an introduction to tuning and temperaments」
<http://mvsica.sakura.ne.jp/eki/ekiinfo/tuning.html#phytagorean>, Sunday 28 August 2011.