

竹とんぼの飛行特性に関する研究

Study on the flight dynamics characteristics of a taketombo

○宇佐美拓也¹, 安田邦男²

*Takuya Usami¹, Kunio Yasuda²

Abstract: The taketombo is a traditional flying toy of Japan transmitted old times. Since the taketombo is made of a bamboo, it is also called the bamboo dragonfly. The taketombo consists of two parts, the wing and the shaft. The wing generates the lift, and the shaft is for giving rotation to the taketombo. But, aerodynamic and flight characteristics are not yet studied. In this study, to clarify the basic flight characteristic of a taketombo, deriving the equation of motion of a taketombo.

1. はじめに

竹とんぼとは、日本古来の伝統的な玩具であり、一般に市販されている竹とんぼや、競技用として使用されているスーパー竹とんぼなどがある。しかしながら、未だその飛行特性は明らかにされていない。

本研究では、竹とんぼに生じる空気力、慣性力、重力とそれぞれによるモーメントを求め、運動方程式を導出することにより、竹とんぼの基本的な飛行特性を明らかにする。

2. 理論

竹とんぼの力とモーメントの運動方程式をそれぞれ導出するために、竹とんぼの幾何学的形態を Figure1 に示し、ブレードと支持棒の空気力と慣性力、重力及びそれぞれによるモーメントを求める。

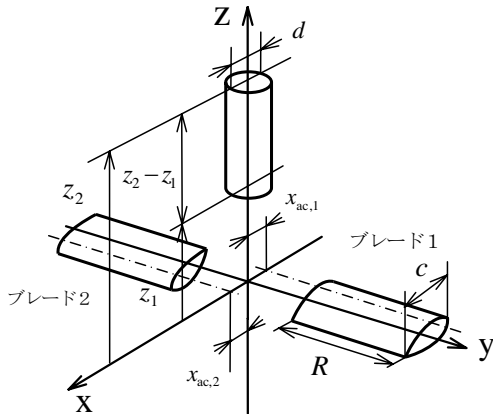


Figure1. Geometric Form of a Taketombo

2.1 ブレードの空気力とモーメント

角速度を Ω , ブレードに働く空気力を F_b^A とすると,

$$F_b^A = \begin{pmatrix} F_{b,x}^A \\ F_{b,y}^A \\ F_{b,z}^A \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 S \begin{pmatrix} C_x^A \\ C_y^A \\ C_z^A \end{pmatrix} \quad (1)$$

となる。ここで、 $(C_x^A, C_y^A, C_z^A)^T$ は空気係数である。

同様に、ブレードに働くモーメントを M_b^A とすると,

$$M_b^A = \begin{pmatrix} M_{b,x}^A \\ M_{b,y}^A \\ M_{b,z}^A \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho (\Omega R)^2 S c \begin{pmatrix} C_{M,x}^A \\ C_{M,y}^A \\ C_{M,z}^A \end{pmatrix} \quad (2)$$

となる。 $(C_{M,x}^A, C_{M,y}^A, C_{M,z}^A)^T$ はモーメント係数である。

2.2 支持棒の空気力とモーメント

吹き下ろし速度 \bar{v} をブレード回転面で一定とし、支持棒の速度成分を表すと,

$$\begin{pmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} qz \\ -pz \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{v} \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。支持棒に働く力を F_s^A とすると,

$$F_s^A = (F_{s,x}^A, F_{s,y}^A, F_{s,z}^A)^T = -\frac{1}{2} \rho d \begin{pmatrix} C_{d,s} \left\{ u_x^2 (z_2 - z_1) + u_x q (z_2^2 - z_1^2) + \frac{1}{3} q^2 (z_2^3 - z_1^3) \right\} \\ C_{d,s} \left\{ u_y^2 (z_2 - z_1) - u_y p (z_2^2 - z_1^2) + \frac{1}{3} p^2 (z_2^3 - z_1^3) \right\} \\ \pi C_f (u_z + \bar{v})^2 (z_2 - z_1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。 $C_{d,s}$ は支持棒の抗力係数、 C_f は摩擦抗力係数である。支持棒に働くモーメントを M_s^A とおくと,

$$M_s^A = (M_{s,x}^A, M_{s,y}^A, M_{s,z}^A)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \rho d C_{d,s} \left\{ \frac{1}{2} u_y^2 (z_2^2 - z_1^2) - \frac{2}{3} u_y p (z_2^3 - z_1^3) + \frac{1}{4} p^2 (z_2^4 - z_1^4) \right\} \\ -\frac{1}{2} \rho d C_{d,s} \left\{ \frac{1}{2} u_x^2 (z_2^2 - z_1^2) + \frac{2}{3} u_x q (z_2^3 - z_1^3) + \frac{1}{4} q^2 (z_2^4 - z_1^4) \right\} \\ -\frac{1}{16} \rho \pi C_f (z_2 - z_1) r^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる。

2.3 竹とんぼに働く重力

機体座標系 (x, y, z) に働く重力 \mathbf{F}^G は,

$$\mathbf{F}^G = \begin{pmatrix} F_x^G \\ F_y^G \\ F_z^G \end{pmatrix} = -(m_b + m_s)g \begin{pmatrix} C_x^G \\ C_y^G \\ C_z^G \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる. ここで, $(C_x^G, C_y^G, C_z^G)^T$ は重力係数である.

2.4 ブレードの慣性力とモーメント

ブレード重心における加速度 \mathbf{a}_b と, ブレードの重心位置ベクトル $\mathbf{r}_b = (0, 0, z_b)^T$ を用いてブレードに働く慣性力 \mathbf{F}_b^I を表すと,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b^I &= -m_b \mathbf{a}_b = -m_b (a_{b,x}, a_{b,y}, a_{b,z})^T \\ &= -m_b \left\{ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + z_b \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \\ 0 \end{pmatrix} + z_b \begin{pmatrix} rp \\ qr \\ -(p^2 + q^2) \end{pmatrix} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

となる. 次に, ブレードに働く慣性力によって生じるモーメント \mathbf{M}_b^I は,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b^I &= -\{I_b \dot{\omega} + \omega \times (I_b \omega)\} \\ &= -(I_{b,x} \dot{\omega}_{b,x}, I_{b,y} \dot{\omega}_{b,y}, I_{b,z} \dot{\omega}_{b,z})^T \\ &= -\begin{pmatrix} I_{b,x} \dot{p} - I_{b,xy} \dot{q} - I_{b,xz} \dot{r} \\ -I_{b,yx} \dot{p} + I_{b,y} \dot{q} - I_{b,yz} \dot{r} \\ -I_{b,zx} \dot{p} - I_{b,zy} \dot{q} + I_{b,z} \dot{r} \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} (I_{b,z} - I_{b,y})rq + (pI_{b,yx} + rI_{b,yz})r - (pI_{b,zx} + qI_{b,zy})q \\ (I_{b,x} - I_{b,z})rp + (pI_{b,zx} + I_{b,zy})p - (qI_{b,xy} + I_{b,xz})r \\ (I_{b,y} - I_{b,x})pq + (qI_{b,xy} + rI_{b,xz})q - (I_{b,yx} + I_{b,yz})p \end{pmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

となる.

2.5 支持棒の慣性力とモーメント

ブレードと同様に, 支持棒の重心位置ベクトルを $\mathbf{r}_s = (0, 0, z_s)^T$ とおくと, 支持棒に働く慣性力 \mathbf{F}_s^I は,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s^I &= -m_s \mathbf{a}_s = -m_s (a_{s,x}, a_{s,y}, a_{s,z})^T \\ &= -m_s \left\{ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + z_s \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -\dot{p} \\ 0 \end{pmatrix} + z_s \begin{pmatrix} rp \\ qr \\ -(p^2 + q^2) \end{pmatrix} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

となり, 支持棒に働く慣性力によるモーメント \mathbf{M}_s^I は,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_s^I &= -\{I_s \dot{\omega} + \omega \times (I_s \omega)\} \\ &= -(I_{s,x} \dot{\omega}_{s,x}, I_{s,y} \dot{\omega}_{s,y}, I_{s,z} \dot{\omega}_{s,z})^T \\ &= \begin{pmatrix} I_{s,x} \dot{p} \\ I_{s,y} \dot{q} \\ I_{s,z} \dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (I_{s,z} - I_{s,y})qr \\ (I_{s,x} - I_{s,z})rp \\ (I_{s,y} - I_{s,x})pq \end{pmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

となる.

2.6 力の運動方程式

式(1),(4),(6),(7),(9)より, 各軸方向の力の運動方程式は以下ようになる.

x 軸方向:

$$m_b a_{b,x} + m_s a_{s,x} = F_{b,x}^A + F_{s,x}^A + F_x^G \quad (11)$$

y 軸方向:

$$m_b a_{b,y} + m_s a_{s,y} = F_{b,y}^A + F_{s,y}^A + F_y^G \quad (12)$$

z 軸方向:

$$m_b a_{b,z} + m_s a_{s,z} = F_{b,z}^A + F_{s,z}^A + F_z^G \quad (13)$$

2.7 モーメントの運動方程式

式(2),(5),(8),(10)より, 各軸方向のモーメントの運動方程式は以下ようになる.

x 軸方向:

$$I_{b,x} \dot{\omega}_{b,x} + I_{s,x} \dot{\omega}_{s,x} = M_{b,x}^A + M_{s,x}^A \quad (14)$$

y 軸方向:

$$I_{b,y} \dot{\omega}_{b,y} + I_{s,y} \dot{\omega}_{s,y} = M_{b,y}^A + M_{s,y}^A \quad (15)$$

z 軸方向:

$$I_{b,z} \dot{\omega}_{b,z} + I_{s,z} \dot{\omega}_{s,z} = M_{b,z}^A + M_{s,z}^A \quad (16)$$

3. 結論

ブレードと支持棒の空気力と慣性力, 重力とそれによるモーメントから, x 軸方向, y 軸方向, z 軸方向の力の運動方程式, モーメントの運動方程式を導出することが出来た.

しかし, この運動方程式は非線形な微分方程式であるので, 厳密解を求めることが出来ない. よって, 数値計算により運動方程式を解く. 数値計算による解法は幾つかあるが, ここでは, 計算が比較的容易なルンゲ・クッタ・ギル法を用いる.

以上の方法を用いて, 速度, 角速度を求め, 竹とんぼの飛行特性を明らかにする.

本研究を進めるにあたり, 貴重な論文を提供してくださいました東 昭東京大学名誉教授, 別府護郎元東海大学教授に心より深く感謝いたします.

4. 参考文献

- [1]東 昭: 東 昭ノート.
- [2]東 昭: 「航空工学 I, II」, 裳華房, 1989.
- [3]加藤寛一郎, 今永勇生: 「ヘリコプタ入門」, 東京大学出版会, 1985.
- [4]入江敏博, 山田元: 「工業力学 II」, 理工学社, 1980.
- [5]宇佐美拓也, 安田邦男: 「竹とんぼの投擲実験と空力特性について」, 第 16 回スカイスポーツシンポジウム講演集, 日本航空宇宙学会, 2010.