L-14

分散性媒質におけるクラマース・クローニッヒの関係式

Kramers-Krohig Relation in the Dispersion Media

○杉崎　直哉[1]，尾崎　亮介[2]，山﨑　恆樹[2]

*Naoya Sugizaki, Ryosuke Ozaki, Tsuneki Yamasaki

Abstract: In this paper, the Kramers-Krohig relation was applied to calculate of the medium constant of a dispersive medium, and analyzed to the imaginary number part from the real parts. we investigated Kramers-Krohig relation by using a numerical integral . Numerical result are given for the influence of compared with Trapezoidal rule and Simpson's rule as a numerical integral techniques .

１．はじめに

近年，遺跡調査や地雷探査技術の研究が活発に行われている．遺跡調査や地雷探査などはその対象物体を非破壊で探査することが必要となる[6]. 探査技術の中でも比較的浅い場所の探査方法として地中レーダ技術が期待されている．現在，地中レーダの分解能を向上する研究がなされている[7].

一般的に地中の媒質は，媒質定数(誘電率や透磁率)が周波数の関数となるので，複素誘電率として定義する必要がある．

著者らは，先に，分散性媒質(土壌)の影響を検討するためパルス応答を FILT 法を用いて解析した[5]．分散性媒質を解析するために，分散性媒質中の媒質定数をセルマイヤー(sellmeier)の三項式と水分比を考慮して配向分極の項を加えた式で表した．しかし，文献[4]の実験値に合うようにセルマイヤーの三項近似式を用いて計算し，媒質定数を決定していたのだが，式中におけるパラメータが多いため複素誘電率の実数部と虚数部を同時に満足するのが困難であった[5].

本文では，分散性媒質の媒質定数の測定値にクラマース・クローニッヒの関係式(Kramers-Krohig Relation)を適用し，実験値の有用性を検討をした．その解析法として，2 種類の数値積分法(台形則とシンプソン則)による計算精度と，積分範囲の違いによる計算結果を検討した.

２．解析法

誘電率$\varepsilon(s)$ は電子分極を Selmeier の三項式で表し，さらに水分による損失を考慮した次式とした[1,2].

$$\frac{\varepsilon(s)}{\varepsilon_0} = 1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{\Omega_i^2}{s^2 + g_i s + \omega_i} + \frac{\tau_0}{1 + s\tau} \tag{1}$$

$\Omega_i, g_i, \omega_i, \tau_o, \tau$ は文献[4]の実験データから求めた. 式(1)において $s = j\omega$ として $\varepsilon(j\omega)$ の実数部 $\varepsilon'(j\omega)$ と虚数部 $\varepsilon''(j\omega)$ を次式で定義する.

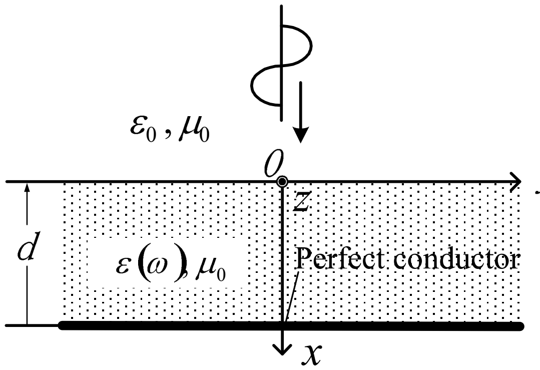


Fig.1 structure and coordinate system

$$\frac{\varepsilon(j\omega)}{\varepsilon_0} = \varepsilon'(j\omega) - j\varepsilon''(j\omega) \tag{2}$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{\Omega_i^2(\omega_i - \omega^2)}{(\omega_i - \omega^2)^2 + \omega^2 g_i^2} + \frac{\tau_0}{1 + (\omega\tau)^2} \tag{3}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\Omega_i^2(-\omega g_i)}{(\omega_i - \omega^2)^2 + \omega^2 g_i^2} + \frac{\tau_0(-\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2} \tag{4}$$

式(3)にパラメータを代入し実験値と比較したものを図 2 に示す．式(3)を次式で表すクラマース・クローニッヒの関係式に代入して虚数部の導出を行う.

複素変数ω の関数を

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) \tag{5}$$

とした時，クラマース・クローニッヒの関係式は

$$\alpha'(\omega) = \frac{2}{\pi} P\int_0^{\infty} \frac{s\alpha''(s)}{s^2 - \omega^2} ds \tag{6}$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P\int_0^{\infty} \frac{a'(s)}{s^2 - \omega^2} ds \tag{7}$$

となる.

但し$P\int$ はコーシーの主値積分を表す.

式(3)を式(6)に代入するが，積分が困難なため本論文では数値積分を用いて近似解を求めた.

数値積分の方法として

台形則[3]

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} h = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \tag{8}$$

1:日大理工・院（前）・電気　　2:日大理工・教員・電気

シンプソン則[3]

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} + y_n \right) \tag{9}$$

以上の二つの方法で解析を行った.

また，以下の解析では特にことわらない限り積分範囲を $0 \sim 10^{10}$ まで一定とする.

3．数値結果

図 2 は周波数 $10^7 \sim 10^{10}$ に対する虚数部 $\varepsilon''(\omega)$ の計算結果を示したものである．ただし図 3(a)の黒線は文献[4]の実験値に合うように式(4)を用いた結果，青線は台形則による数値積分の結果，赤線はシンプソン則による数値積分の結果を示したものである．図 3(a)より，台形則とシンプソン則の数値積分の結果を比べると，精度があまり良くはないがシンプソン則の結果の方が文献[4]の結果に近づいていることが分かる.

次に図 3(b)は図 3(a)で得られた結果より，シンプソンの則の方が文献[4]の実験値に近づくので，シンプソン則を用いた場合に限り，積分範囲を変化させたものを青線として図 3(b)に示す．図 3(b)より，実験値の範囲での数値積分より範囲を広くした時の方が文献[4]の結果に近づくことが分かる.

次に図 3(c)は図 3(b)のときと同様にシンプソン則を用いた場合に限り，h を変化させたものを青線として図 3(c)に示す．図 3(c)より，h はより小さいほうが文献[4]の結果に近づくことがわかる．しかし h を小さくすればするほど計算に時間がかかってしまうことになる.

4．まとめ

本文ではクラマース・クローニッヒの関係式を用いて分散性媒質(土壌中に水分を 10%混在した媒質)の誘電率の実数部から虚数部の導出を検討し，次のことが明らかになった．(1)数値積分の結果から，刻みを多くし，積分範囲を広げる等の精度を上げることで，虚数部の実験値に近づくことがわかる．(2)一定の周波数区間での虚数部をクラマース・クローニッヒの関係式を用いて求める場合，その一定の周波数区間の実数部のみではなく，実数部すべての値が必要である.

今後は数値積分の精度の向上や，虚数部から実数部の計算，計算時間を短縮する方法の検討を予定している.

5．参考文献

[1]細野敏夫：電磁波工学の基礎，昭晃堂，pp.24-30, 1973.

[2]細野敏夫：メタ電磁気学，森北出版，1999.

[3]戸川隼人：数値計算法，コロナ社，pp.24-26，1981.

[4]Jackie E.HIPP：Soil Electromagnetic Parameters as Functions of Frequency，Soil Density ,and Soil Moisture, Proc .of The IEEE,Vol.62,No.1,pp.98-103, Jan., 1974.

[5]村上，尾崎，山崎：日大理工学術講演会，L-43, pp.1188-1189, 2007.

[6]電学誌，vol.125,no.3pp.173-176, 2005.

[7]西本，上野，永吉：電学研資，EMT-05-17, 2005.

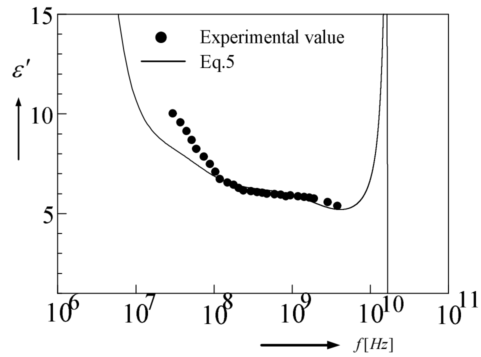
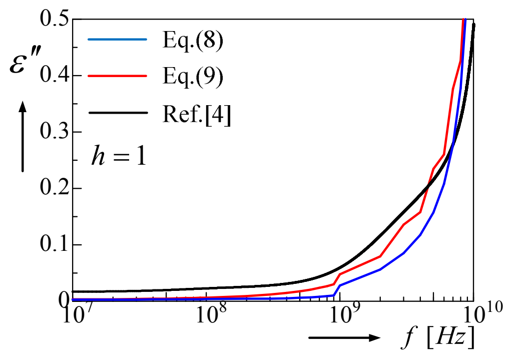
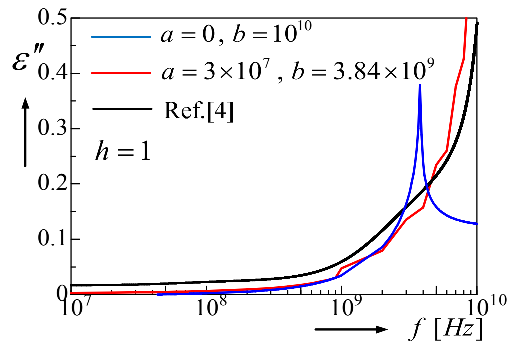


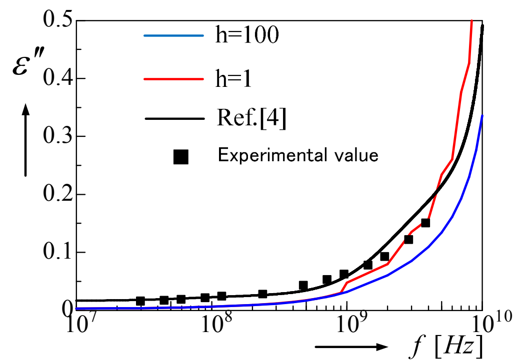
Fig.2 The Real Part of a dielectric constant



(a)



(b)



(c)

Fig.3 Frequency vs. $\varepsilon''(\omega)$