

負屈折率分布を持つ不均質媒質による電磁波の散乱

Scattering of Electromagnetic Waves by Inhomogeneous Medium with Negative Refractive Index

○白鳥 博信¹, 尾崎 亮介², 山崎 恆樹²

*Hironobu Shiratori¹, Ryosuke Ozaki², Tsuneki Yamasaki²

Abstract: Research of the metamaterial is done briskly in recent years. Metamaterial structures by optical (wave) and the like can control and configure the resonator and waveguide structure, which is expected as such can be applied to smaller antennas. In the previous paper, electromagnetic wave analysis in dielectric slab with negative refractive index distribution was conducted. This paper describes the analysis technique according scattering of electromagnetic waves in a Inhomogeneous medium with negative refractive index distribution to a Fourier series method.

1. はじめに

近年メタマテリアルの研究が盛んに行われている。メタマテリアルは構造体によって光（電波）の制御が可能となり、共振器や導波路、アンテナ等の小型化に応用できるとして期待される。

先の報告^[2]では負の屈折率分布を持つ誘電体スラブ中の電磁波解析を行った。

本論文では、負の屈折率分布を持つ不均質媒質中の電磁波の散乱を Fourier 級数法による解析手法の定式化について述べる。

2. 解析法

本論文で検討するのは図 1 に示すように領域 S_0, S_3 が真空領域 (ϵ_0, μ_0)、領域 $S_2(\epsilon(z), \mu(z))$ は厚み d で図 1 に示すよう誘電率、透磁率が超苦戦的に変化するものとする。

TE 波（電界が y 成分のみ）が $z < 0$ から角度 θ_0 で入射する場合について定式化を示す。時間因子は $\exp(j\omega t)$ として以下省略する。 S_2 領域の電磁界 $E_y \triangleq E(z)e^{jk_x x}$ とすると $E(z)$ を満足する微分方程式は

$$\mu(z) \frac{d^2 E(z)}{dz^2} - \frac{d\mu(z)}{dz} \frac{dE(z)}{dz} + \{k(z)^2 - k_x^2\} \mu(z) E(z) = 0 \quad (1)$$

但し、 $k(z)^2 = \omega^2 \epsilon(z) \mu(z)$ 、 $\epsilon(z), \mu(z)$ は複素数で $\epsilon(z) \triangleq \epsilon'(z) + j\epsilon''(z)$ 、 $\mu(z) \triangleq \mu'(z) + j\mu''(z)$ である。

また、 k_x は x 方向の伝搬定数である。

そして Floquet の定理より、周期関数 $E(z)$ を

$$E(z) = e^{jk_x z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{d} z} \quad (2)$$

とし、式(1)に代入すると

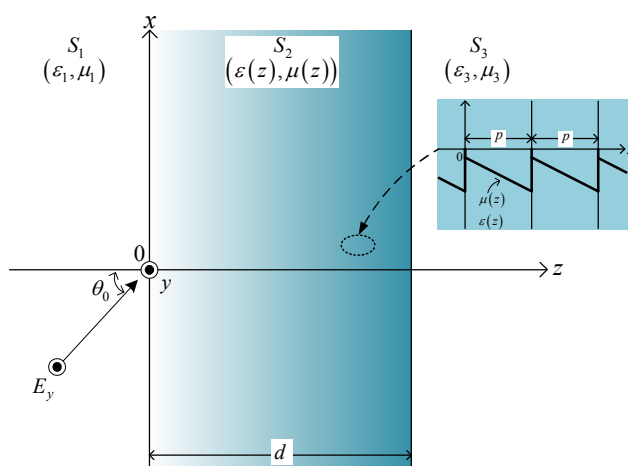


Fig.1 Structure and coordinate system of inhomogeneous medium with negative refractive index

$$-\frac{\mu(z)}{\mu_1} \left\{ \left(k_z + \frac{2\pi n}{d} \right)^2 + k_x^2 \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{d} z} - j \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\mu(z)}{\mu_1} \right\} \left(k_z + \frac{2\pi n}{d} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{d} z} + \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 \frac{\epsilon(z)}{\epsilon_1} \left(\frac{\mu(z)}{\mu_1} \right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{d} z} = 0 \quad (3)$$

となる。

また、それぞれの項を以下の様に置く

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\mu(z)}{\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{d} z} \\ f_2(z) &= j \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\mu(z)}{\mu_1} \right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{d} z} \\ f_3(z) &= \left(\frac{\mu(z)}{\mu_1} \right)^2 \frac{\epsilon(z)}{\epsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{d} z} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$f_1(z)$ を $e^{-j \frac{2\pi m}{d} z}$ で積分すると

1:日大理工・院(前)・電気 2:日大理工・教員・電気

$$\begin{aligned}
 c_{m1} &= \frac{1}{d} \int_0^d f_1(z) e^{-j\frac{2\pi m}{d}z} dz \\
 &= \frac{1}{d} \int_0^d \frac{\mu(z)}{\mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{d}z} e^{-j\frac{2\pi m}{d}z} dz \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{d} \int_0^d \frac{\mu(z)}{\mu_1} e^{j\frac{2\pi}{d}(n-m)z} dz \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \eta_{n,m}^{(TE)}
 \end{aligned} \tag{6}$$

とする. 同様にして残りの式を $\zeta_{n,m}^{(TE)}$, $\xi_{n,m}^{(TE)}$ と置く.

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_{n,m}^{(TE)} &= \frac{1}{d} \int_0^d \frac{\mu(z)}{\mu_1} e^{j\frac{2\pi}{d}(n-m)z} dz \\
 \zeta_{n,m}^{(TE)} &= \frac{j}{d} \int_0^d \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\mu(z)}{\mu_1} \right\} e^{j\frac{2\pi}{d}(n-m)z} dz \\
 \xi_{n,m}^{(TE)} &= \frac{k_1^2}{d} \int_0^d \left(\frac{\mu(z)}{\mu_1} \right)^2 \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_1} e^{j\frac{2\pi}{d}(n-m)z} dz
 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

式(7)を式(3)に代入して整理すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\begin{aligned}
 &k_z^2 \eta_{n,m}^{(TE)} + k_z \left(\frac{4\pi n}{d} \eta_{n,m}^{(TE)} + \zeta_{n,m}^{(TE)} \right) \\
 &+ \left\{ \left(\frac{2\pi n}{d} \right)^2 + k_x^2 \right\} \eta_{n,m}^{(TE)} \\
 &+ \frac{2\pi n}{d} \zeta_{n,m}^{(TE)} - \xi_{n,m}^{(TE)}
 \end{aligned} \right] c_n = 0 \tag{8}$$

となる. 式(8)の項をそれぞれ行列式としてまとめると

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \eta_{n,m}^{(TE)} & \mathbf{c} &= c_{-\infty} \cdots c_0 \cdots c_{\infty} \\
 \mathbf{C} &= \frac{4\pi n}{d} \eta_{n,m}^{(TE)} + \zeta_{n,m}^{(TE)} \\
 \mathbf{K} &= \left\{ \left(\frac{2\pi n}{d} \right)^2 + k_x^2 \right\} \eta_{n,m}^{(TE)} + \frac{2\pi n}{d} \zeta_{n,m}^{(TE)} - \xi_{n,m}^{(TE)}
 \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

よって式(8)は

$$k_z^2 \mathbf{M} \mathbf{c} + k_z \mathbf{C} \mathbf{c} + \mathbf{K} \mathbf{c} = 0 \tag{10}$$

となる.

式(10)は, 構造解析などに現れる MCK 型 (\mathbf{M} :質量マトリクス, \mathbf{C} :減衰マトリクス, \mathbf{K} :合成マトリクス)

の固有値問題と同じである.

次に $\mathbf{v} \triangleq k_z \mathbf{c}$ と置くことで

$$\begin{cases} k_z \mathbf{c} \triangleq \mathbf{v} \\ k_z \mathbf{v} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{c} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{v} \end{cases}$$

と表せるので行列表示すると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = k_z \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$\mathbf{1}$: 単位ベクトル, \mathbf{M}^{-1} : \mathbf{M} の逆行列

よって, 標準固有値問題に帰着できる.

k_z が一つの固有値であるならば $-k_z$ もまた固有値となること, $\pm k_z$ に $2\pi n/d$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を加えても固有値となることがわかる.

次に周期構造内の解を用いて不均質媒質による反射波と透過波を求めるには, $k_z, -k_z$ とこれに対応する固有ベクトル $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}$ を用いる. S_2 領域の電磁界は

$$\left. \begin{aligned}
 E_y &= \left\{ A f_N^{(1)}(z) + B f_N^{(2)}(z) \right\} e^{jk_x x} \\
 H_x &= \left\{ j\omega\mu(z) \right\}^{-1} \partial E_y / \partial z \\
 f_N^{(l)}(z) &\triangleq e^{jk_z(N)(-1)^{l+1}z} \sum_{n=-N}^N u_n^{(l)} e^{j\frac{2\pi n}{d}z} \quad l=1, 2
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

但し A, B はそれぞれ不均質媒質層の透過波及び反射波で境界条件より求まる未知定数である.

また, $y=0, d$ での電磁界の境界条件より入射波

$$\left. \begin{aligned}
 E_y^i &= e^{-j(k_{1z}z + k_{1x}x)} \\
 k_{1z} &\triangleq k_1 \cos \theta_1, \quad k_{1x} \triangleq k_1 \sin \theta_1
 \end{aligned} \right\}$$

の場合, S_1 領域の反射波及び S_3 領域の透過波は次式で表される.

$$\left. \begin{aligned}
 E_y^r &= R^{(TE)} e^{-j(k_{1z}z - k_{1x}x)}, & E_y^1 &\triangleq E_y^i + E_y^r \\
 E_y^3 &= T^{(TE)} e^{j\{k_{3z}(z-d) - k_{1x}x\}} \\
 H_x^{(l)} &= (j\omega\mu_l)^{-1} \partial E_y^{(l)} / \partial z, & l &= 1, 3 \\
 k_x &= k_{1x} = k_{3x} = k_0 \sin \theta_0
 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

よって式(10),(11)より $R^{(TE)}, T^{(TE)}$ を求めると

$$R^{(TE)} = \frac{2 \left\{ Q_2 f_N^{(1)}(0) - Q_1 f_N^{(1)}(0) \right\}}{P_1 Q_2 - P_2 Q_1} - 1 \tag{14}$$

$$T^{(TE)} = \frac{2 \left\{ Q_2 f_N^{(2)}(d) - Q_1 f_N^{(2)}(d) \right\}}{P_1 Q_2 - P_2 Q_1} \tag{15}$$

但し,

$$\left. \begin{aligned}
 P_l &= f_N^{(l)}(0) + \frac{\mu_0}{k_1 \mu(Z_{0+}) \cos \theta_1} f_N^{(l)'}(0) \\
 Q_l &= f_N^{(l)}(d) - \frac{\mu_0}{k_3 \mu(Z_{d-}) \cos \theta_3} e^{jk_3 d \cos \theta_3} f_N^{(l)'}(d) \\
 \mu(Z_{0+}) &= -\mu_1, \quad \mu(Z_{d-}) = -\mu_2 \quad l=1, 2
 \end{aligned} \right\}$$

となる.

3. まとめ

本文では, 負の屈折率分布を持つ不均質媒質中の電磁波の散乱を Fourier 級数法による解析手法について定式化を行った. 今後は数値解析を行う予定である.

4. 参考文献

- [1] 山崎, 日向, 細野: Fourier 級数法による不均質媒質の電磁界解析, 信学論 B, vol.66, No.10, pp1239-1246, 1983.
- [2] 白鳥, 尾崎, 山崎: 負屈折率分布を持つ誘電体スラブによる電磁波の散乱, 日本大学学術講演会, L-28, pp975-976, 2010.
- [3] 細野敏夫: 電磁波工学の基礎, 1973.