L-17

FLIT 法を用いた特殊関数の計算法

Calculation of Special Function Using the FILT Method

○奥田　量太[1]，尾崎　亮介[2]，山﨑　恆樹[2]

*Ryota Okuda[1]， Ryosuke Ozaki[2], Tsuneki Yamasaki[2]

Abstract: In recent years, many special functions are used in the analysis of electromagnetic waves. A special function is needed for the analysis of a dispersion object which has a corner point. A Laplace conversion method is the leading mathematical technique, and is applied to theoretical analysis or numerical analysis. It is FILT (Fast Inversion of Laplace Transform) in which numerical Laplace inverse transform is possible at a high speed also in it. In this paper, the FILT method for the ability to ask for these functions is used -- the numerical analysis method of the Bessel function which is one of the special functions is examined.

１．はじめに

近年，電磁波の解析において，特殊関数が多く用いられている．特に図１のような[5]端点を有する電磁波の散乱物体のような複雑な形状の解析には，複素変数の特殊関数が必要になってくる．このような，工学的問題を解析する際に Laplace 変換法は, 有力な数学的手法であり，理論解析や数値解析に応用されている．数値的に Laplace 逆変換を行うために各種の方法が提案されており, その中でも高速で数値的 Laplace 逆変換が可能な，FILT (Fast Inversion of Laplace Transform) 法を用いた数値解析がある．本文では，これらの関数を同時に求める事ができる FILT 法を用い，特殊関数の一つである Bessel 関数の数値解析法を検討する．

２．解析法

２．１　FILT 法

Laplace 変換及び Laplace 逆変換は以下のように定義される．

$$F(s) \triangleq \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} F(s)e^{st}ds \tag{2}$$

である．以後，簡単のため逆 Laplace 変換を

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) \tag{3}$$

で表すことにする．

次に FILT 法は文献[1]より基本式として以下の近似式を用いる．

$$f_{ec}(t,a) = \frac{e^a}{t}\sum_{n=1}^{\infty} F_n \tag{4}$$

$$F_n \triangleq (-1)^n \operatorname{Im}\left[F\left(\frac{a+j(n-0.5)\pi}{t}\right)\right] \tag{5}$$

このとき，$a=3$ とした．このパラメータは FILT 法の計算精度を決定するものである．項数 n=1000 として解析した．また，誤差の影響を考慮し，Euler の変換公式を用いた．

$$f_{ec}(t,a) = \frac{e^a}{t}\left\{\sum_{n=1}^{k-1} F_n + A_{p0}^{-1}\sum_{q=0}^{p-1} A_{pq}F_{k+q}\right\} \tag{6}$$

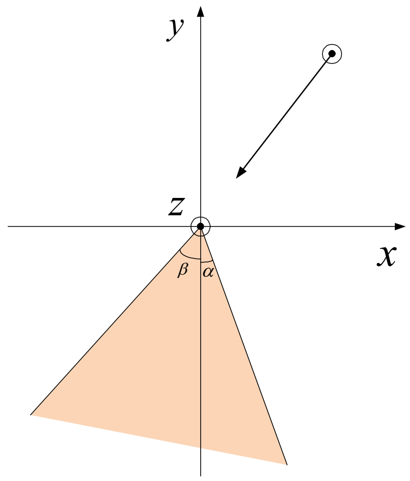


Figure 1 The wedge and coordinate system of vertical angle

$$F_n = (-1)^n \operatorname{Im}\left[F\left(\frac{a+j(n-0.5)\pi}{t}\right)\right] \tag{7}$$

本解析では，Euler 変換の次数 p =10 とする．

２．２　Bessel 関数

ν 次の第 1 種 Bessel 関数 J_ν について Laplace 変換は文献[2]より，次のような形なる．

$$\mathcal{L}\left[J_\nu(t)\right] = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{R}\right)^\nu \quad \therefore \operatorname{Re}\nu > -1 \tag{8}$$

また ν 次の第 2 種 Bessel 関数（Neumann 関数）N_ν を Laplace 変換は文献[3]より次のような形になる．

$$\mathcal{L}\left[N_0(t)\right] = \frac{2\log R}{\pi r} \tag{9}$$

$$\mathcal{L}\left[tN_1(t)\right] = -\frac{2\left(s+\frac{1}{r}\log R\right)}{\pi r^2} \tag{10}$$

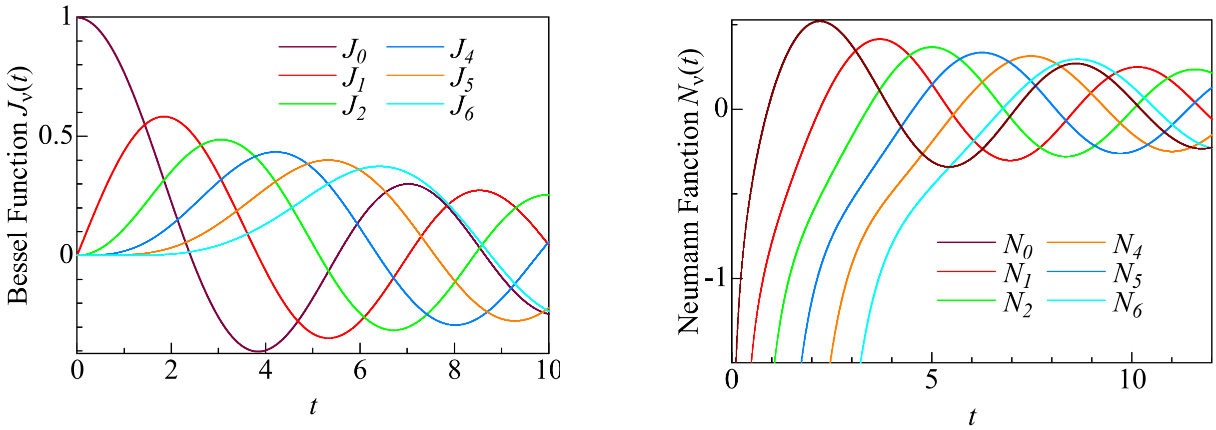
$$\mathcal{L}\left[N_\nu(t)\right] = \frac{\cos(\nu\pi) - R^{2\nu}}{rR^\nu \sin(\nu\pi)} \quad \therefore \left|\operatorname{Re}\nu\right| < 1 \tag{11}$$

このとき，$r=\sqrt{s^2+1}$，$R=s+r$ とする．

２．３　Bessel 関数の漸化式

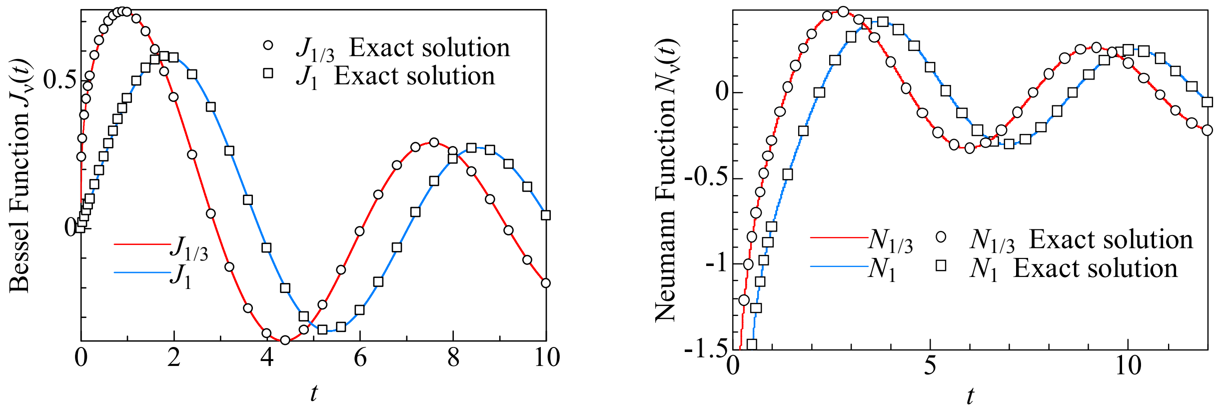
Bessel 関数 $J_\nu(t), N_\nu(t)$ を一般的に $Z_\nu(t)$ で代表させる．このとき，$Z_\nu(t)$ は次の漸化式を満足する．

１：日大理工・院（前）２：日大理工・教員・電気



(a) Bessel Function　$J_\nu(t)$　　(b) Neumann Function　$N_\nu(t)$

Figure 2 The graph of the Bessel function by the FILT method.



(a)　Bessel Function　$J_\nu(t)$　　(b) Neumann Function　$N_\nu(t)$

Figure 3 Comparison of a computation result and a exact solution by the FILT method for the Bessel function.

$$Z_{\nu-1}(t)+Z_{\nu+1}(t)=\frac{2\nu}{t}Z_\nu(t)$$

文献[3]に Laplace 変換の式の記載のない 2 次以上の Neumann 関数は上の漸化式より $Z_{\nu+1}$ を求め，数値計算を行った. 以上の式をもとに FILT 法に用いて数値解析を行った.

3．数値結果

図２はFILT法を用いて整数次のBessel関数とNeumann関数を示したものである．図２(a)に Bessel 関数 $J_0(t)\sim J_6(t)$，図２(b)に Newmann 関数 $N_0(t)\sim N_6(t)$ を示した．図２(a)，(b)より，文献[4]の結果とよく一致していることがわかる. 次に, 図３は図２の整数次の Bessel 関数 $J_1(t)$ に加え，実数次の Bessel 関数 $J_{1/3}(t)$ を文献[2]の厳密解の結果と比較し，示したものである．図２と同様に, 図３(a)に Bessel 関数を示し, 図３(b)に Neumann 関数を示した．図３より，次のことがわかる.

（１）整数次の Bessel 関数と Neumann 関数はすべての範囲で一致していることがわかる.

（２）実数次の Bessel 関数と Neumann 関数のすべての範囲で一致していることがわかる.

4．まとめ

本文では，FILT 法を用いて，実数次の特殊関数（Bessel 関数と Neumann 関数）の数値解析を行い，$J_1(t), N_1(t)$ と $J_{1/3}(t), N_{1/3}(t)$ について，厳密解と比較した結果, よく一致していることが確認できた. 今後は, 電磁波の散乱問題に特殊関数の逆変換を用い，適用していく予定である.

4．まとめ

本文では，FILT 法を用いて，実数次の特殊関数（Bessel 関数と Neumann 関数）の数値解析を行い，$J_1(t), N_1(t)$ と $J_{1/3}(t), N_{1/3}(t)$ について，厳密解と比較した結果, よく一致していることが確認できた. 今後は, 電磁波の散乱問題に特殊関数の逆変換を用い，適用していく予定である.

参考文献

[1]細野敏夫：BASIC による高速ラプラス変換, pp 17-66 (1984).

[2] G.N.Watoson : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge at the University Press, pp. 14-84, 661~752 (1922).

[3] Arthur Erdelyi : Tables of Integral Transforms, Mcgraw-Hill Book Company Inc, Vol.1, pp. 182-195 (1954).

[4] 細野敏夫：電磁波工学の基礎，(1973)

[5] 細野・日向・山口：電学研資，楔形スリットによる電磁波の散乱について，EMT-76-34, (1976)