

ツイスターを用いた多重グルーオン散乱振幅の解析
 An analysis of multi-gluon scattering amplitudes by using twistor

○丸山直裕¹, 野手順一¹, 出口真一²

*Naohiro Maruyama¹, Jyun-ichi Note¹, Shinichi Deguchi²

Abstract : In a high energy region, multi-gluon scattering amplitudes can be calculated using Feynman diagrams. However, the analysis of scattering amplitudes is difficult in practice, because an extremely large number of Feynman diagrams appear according as the number of external lines increase. In this paper, we provide an expression of maximally helicity violating (MHV) amplitudes written in terms of twistors, aiming at finding a simple calculation method of multi-gluon scattering amplitudes.

1. 導入

現在、陽子や中性子は強い相互作用によって結びつけられたクォークで構成されていることが知られている。また、この強い相互作用を媒介する素粒子はグルーオンと呼ばれている。強い相互作用は「粒子同士の距離が離れれば離れるほど結合が強くなり(強結合)、逆に近づけば近づくほど結合が弱くなる(弱結合)」という漸近的自由性をもつ。本研究では、弱結合領域における多重グルーオン散乱の新たな解析法を与える。

弱結合領域では摂動展開が使えるため、グルーオンの散乱振幅は Feynman 図を用いて計算される。しかし、そこには「グルーオンの数を増やした時に、その増加分以上の膨大な Feynman 図が発生する」という問題がある。例えば、グルーオンの数が 4 個の時、Feynman 図は 4 個であるが、10 個の時には Feynman 図は 10⁸ 個を超えるのである。この場合、人の手による解析は困難であり、高度な計算機を用いる必要が出てくる。さらに、実験結果の厳密な解析をする際にも、膨大な数の Feynman 図が解析の精度を下げてしまう原因となっている。この問題を解決する為の一つの方法として、2003 年に Witten が提唱したツイスターを用いる解析法がある。ツイスター理論は無質量粒子の記述に適しているなどの利点をもつ。従って、ツイスター理論を無質量粒子であるグルーオンの多重散乱に応用し、散乱振幅に対する新たな計算方法を与えることが可能になる。

本研究では、計算の便宜上、空間座標の一つを虚軸にすることで、Minkowski 空間の計量 (+, -, -, -) を (+, +, -, -) に変更する。

2. MHV 振幅

多重グルーオン散乱振幅の中で、特に注目されるものがヘリシティが最大に破れた(maximally helicity violating (MHV)) 振幅である。これは、Figure1 のような巡回的に

固定した n -グルーオンの tree level 散乱過程を考えた時、負ヘリシティのグルーオンが 2 個、正ヘリシティのグルーオンが $n-2$ 個の場合である。これ以降、全てのグルーオンの運動量を内向きにとり、散乱振幅も摂動計算が良いとして tree のみを考える。

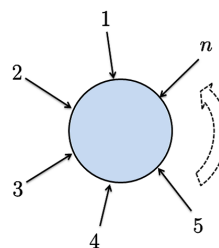


Figure1. A scattering process of n gluons in QCD

MHV 振幅を構成するために、まずは tree level での n -グルーオンの全散乱振幅を考える。これは、グルーオンの数ラベルについて可能な全ての順序について足し上げることにより

$$M = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i P_i \right) \mathcal{A}(1, \dots, n) \text{Tr}(T_1 \dots T_n) + \text{permutation} \quad (1)$$

と与えられる。ここで P_i は四元運動量、 $\delta^4(\sum P_i)$ が運動量保存則の δ -関数、 \mathcal{A} が tree level の散乱振幅、そして T_i がゲージ群 SU(N) の生成子である。これより tree level の MHV 振幅は

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i P_i \right) \mathcal{A}(1, \dots, n) \quad (2)$$

と構成される。

運動量がヌルベクトルの場合には $P_i = \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}$ ($a = 1, 2, \dot{a} = \dot{1}, \dot{2}, \lambda_i^a, \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \in \mathbf{RP}^1$) の様なスピノール積で表記できる。但し、 λ_i^a は負ヘリシティスピノール、 $\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}$ は正ヘリシティスピノールと呼ばれ、互いに独立である。また tree level の散乱振幅は、 r, s 番目のグルーオンが負へ

¹ 日大理工・院・量子 ² 日大・量科研

リシティをもち、その他のグルーオンが正ヘリシティをもっていた場合には

$$A(1, \dots, n) = g^{n-2} \frac{\langle \lambda_r, \lambda_s \rangle^4}{\prod_{k=1}^n \langle \lambda_k, \lambda_{k+1} \rangle} \quad (3)$$

となる。ここで、 g はグルーオンの結合定数、 $\langle \lambda_r, \lambda_s \rangle$ は $\langle \lambda_r, \lambda_s \rangle = \epsilon_{ba} \lambda_r^a \lambda_s^b$ と定義される負ヘリシティスピノールの Lorentz 不変積である。また、散乱振幅は cyclic order をとる為、 $\lambda_{n+1} = \lambda_1$ となる。式 (3) は、負ヘリシティスピノールだけに依存していることに注意されたい。

これより MHV 振幅は

$$A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) = (2\pi)^4 g^{n-2} \delta^4 \left(\sum_i \lambda_i^a \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \right) \frac{\langle \lambda_r, \lambda_s \rangle^4}{\prod_{k=1}^n \langle \lambda_k, \lambda_{k+1} \rangle} \quad (4)$$

と書き直すことができる。

3. ツイスター直線と時空点

計量 $(+, +, -, -)$ の時空に対応するツイスター空間は \mathbf{RP}^3 であり、その元であるツイスター Z^α は

$$Z^\alpha = (\mu_{\dot{a}}, \lambda^a) \quad (\mu_{\dot{a}}, \lambda^a \in \mathbf{RP}^1) \quad (5)$$

である。ここで $\mu_{\dot{a}}$ は、時空点の座標 $x_{\dot{a}a}$ を用いて $\mu_{\dot{a}} = -x_{\dot{a}a} \lambda^a$ と定義される。このとき、 $\mu_{\dot{a}}$ と λ^a は実数であることに注意する。また λ^a と Z^α はそれぞれ同値関係 $\lambda^a \sim c\lambda^a$ と $Z^\alpha \sim cZ^\alpha (c \in \mathbf{R})$ を満たすため、 λ^a は 1 つ、 Z^α は 3 つの自由度をもつ。

ツイスター空間における直線は

$$\mu_{\dot{a}} + x_{\dot{a}a} \lambda^a = 0 \quad (6)$$

で定義される。この方程式は \dot{a} が $\dot{1}$ と $\dot{2}$ をとるので、二つの平面を決める。そして、その二つの平面の重なった部分がツイスター空間での直線とみなせるのである。ここで、位置座標 $x_{\dot{a}a}$ を定めた場合、 λ^a を決めれば $\mu_{\dot{a}}$ が決まる。これより、 λ^a が直線のパラメータであることがわかる。

ツイスター空間 Z^α は 3 つの自由度をもつ射影空間であるので、残る自由度は $3 - 2 = 1$ となり、ツイスター空間における直線は実射影直線 (\mathbf{RP}^1) であることがわかる。これより、ツイスター空間における直線が時空点に対応していることが理解できる。

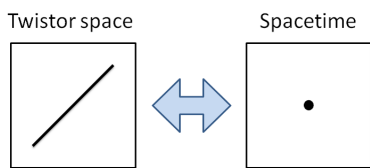


Figure 2. A line in twistor space corresponds to a space-time point

4. ツイスター空間での MHV 振幅

運動量空間からツイスター空間への変換は、 $\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}$ が実数であるので通常の Fourier 変換となる。従って、ツイスター空間に Fourier 変換された MHV 振幅は

$$\tilde{A}(\lambda_i, \mu_i) = \int \prod_{j=1}^n \frac{d^2 \tilde{\lambda}_j}{(2\pi)^2} e^{i[\mu_j, \tilde{\lambda}_j]} A(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i) \quad (7)$$

となる。ここで $[\mu_j, \tilde{\lambda}_j]$ は、 $[\mu_j, \tilde{\lambda}_j] = \epsilon_{\dot{a}b} \mu_j^{\dot{a}} \tilde{\lambda}_j^{\dot{b}}$ と書ける正ヘリシティスピノールの Lorentz 不変積である。実際に、 $\tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}$ についての積分を実行し、整理すると MHV 振幅は

$$\tilde{A} = g^{n-2} \int dx_{\dot{a}a} \prod_{j=1}^n \delta^2(\mu_{j\dot{a}} + x_{\dot{a}a} \lambda_j^a) \frac{\langle \lambda_r, \lambda_s \rangle^4}{\prod_{k=1}^n \langle \lambda_k, \lambda_{k+1} \rangle} \quad (8)$$

となる。このとき、デルタ関数 $\delta^2(\mu_{j\dot{a}} + x_{\dot{a}a} \lambda_j^a)$ が存在するため、 $\mu_{j\dot{a}} + x_{\dot{a}a} \lambda_j^a = 0$ 以外からの MHV 振幅への寄与はない。方程式 $\mu_{j\dot{a}} + x_{\dot{a}a} \lambda_j^a = 0$ はツイスター直線の定義に他ならないので、ツイスター空間に変換された MHV 振幅は、ツイスター直線上にのみ存在することがわかる。

また、ループまで含んだ振幅に関しては「負ヘリシティのグルーオンを q 個もつ ℓ -ループ振幅はツイスター空間における正則曲線上に存在する」という Witten の予想がある。この正則曲線の次数 d は

$$d = q - 1 + \ell \quad (9)$$

で定義される。tree level の MHV 振幅の場合は $q = 2, \ell = 0$ であるので、 $d = 1$ の一次曲線、つまり直線上に振幅が存在する特別なケースである。これは、先ほど示した tree level の MHV 振幅があるツイスター直線上にのみ存在していた事と一致している。

5. まとめと今後の課題

本研究では、スピノール変数で書かれた MHV 振幅を Fourier 変換し、ツイスター空間における MHV 振幅を導いた。このとき、MHV 振幅への寄与は一つのツイスター直線から与えられることがわかった。

今後は、今回導いた MHV 振幅の表式を用いて Feynman 則に代わる解析法を考察すると共に、本研究の基礎となるツイスター弦理論まで深めて検討していきたい。

参考文献

- [1] V. P. Nair, Notes for lectures at BUSSTEPP 2005, (2005).
- [2] F. Cachazo and P. Svrcek, **PoS(RTN2005)004**, (2005).
- [3] 国友 浩, 日本物理学会誌, **Vol.62**, No.8, pp.617-621, (2007).